Math. P.
382e

th. P. 382e

Geschenk
des Verfassers
an d. Akad. d. Wissenschaften.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

R

Reine
Mathematik
für die
Schulen und Universitäten
Deutschlands.

Zweite Abtheilung.
Geometrie und Trigonometrie
enthaltend.

Mit einer Kupfertafel.

Ein Beitrag zur Revision der Mathematik.

Berlin 1819.
In der Maurerschen Buchhandlung.
(Poststraße No. 29.)

m

Elementar-Geometrie

und

Trigonometrie

für

Deutschlands Schulen

und

Universitäten.

Zunächst

für Preußens Schulen

bestimmt

von

Dr. Martin Ohm,

Königl. Preuß. Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Thorn; der allgemeinen kameralistisch-ökonomischen Societät zu Erlangen, so wie auch der naturforschenden Gesellschaft zu Halle correspondirendem Mitglied.

Ein Beitrag zur Revision der Mathematik.

Berlin 1819.

In der Maurerschen Buchhandlung.

(Poststraße No. 29.)

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Daß das Studium der Mathematik auf unsern deutschen Schulen und Universitäten noch immer äussert danieder liegt, ist leider eine zu bekannte Thatsache, als daß sie noch weiterer Belege bedürfte. Die Bemühungen einzelner Männer zur Abhülfe dieses Uebels, das auf die Wissenschaftlichkeit der Zöglinge unserer gelehrten Anstalten und so auch auf das innere Leben des Staates von so entschiedenem Einflusse ist, können wenig nützen, so lange sie nicht allgemeiner werden und der Staat nicht selbst lebhaften Theil daran nimmt, so wenig als der beste Wille der Regierung zu thun vermag, wenn nicht die Mathematik selbst erst in ihren Principien revidirt und dadurch zu derjenigen Einfachheit und Strenge zurückgebracht ist, vermöge welcher sie ihre Würde als Unterrichtsgegenstand behaupten kann.

Die Mathematik als Wissenschaft sowohl, als die Einrichtung ihres Unterrichts, bedürfen daher einer gänzlichen Reform,

wenn wir an unsern Schulen und besonders an unsern Universitäten Wissenschaftlichkeit und Liebe zur Wissenschaft wieder aufblühen sehen wollen.

Man muß aber wieder Mathematik als Wissenschaft, von Mathematik als Unterrichtsgegenstand unterscheiden. Für die erstere giebt es nur einen Weg ihrer Behandlung, nur den der das allgemeinste zunächst und das Besondere nur im Allgemeinen betrachtet, den Weg, der uns in die tiefsten Heiligthümer ihrer Wahrheiten schnell und unaufhaltsam einführt. Meine Mathematik als Wissenschaft besteht daher aus einer Zahlenlehre, die es nur mit sogenannten absoluten ganzen Zahlen (andere giebt es nicht) als dem Allgemeinsten zu thun hat und die ganze Mathematik in sich faßt. Zunächst der Zahlenlehre folgt dann ihre Anwendung auf Größen (daher auch auf Raumgrößen. *)

*) Diese meine Mathematik habe ich in einer frühern Schrift Elementarzahlenlehre. Erlangen 1816. dem Publiko mitzutheilen begonnen. In so fern aber jene Schrift als Leitfaden dienen sollte, war es unvermeidlich, daß diejenigen, welche sich nicht die Mühe geben mochten tiefer in ihren Geist einzugehen, an den wichtigsten Stellen, (vielleicht weil die Schwierigkeiten gar zu einfach gelößt wurden) Mangel an Strenge zu ahnen glaubten. Diese ersuche ich, sich zu gedulden, bis ich mich meiner jetzigen besondern

Ganz anders ist es mit der Mathematik als Unterrichtsgegenstand. Vom Besondern zum Allgemeinen fortzuschreiten und nachher den Gegenstand so viel wie möglich allseitig zu betrachten, sind hier die ersten Regeln, die im Einzelnen und im Ganzen beobachtet werden müssen. Deswegen muß auch die Geometrie zuerst, so weit es angeht, unabhängig von der Zahlenlehre, in und für sich abgeschlossen, vorgetragen werden.

Da aber Consequenz und die daraus hervorgehende Einheit des Vortrags bey dem Unterrichte ebenfalls unerläßliche Bedingungen sind, so wird der Zweck des Unterrichts meist gänzlich verfehlt, wenn man,

---

Pflichten entledigt und dadurch die nöthigen Hülfsmittel gewonnen haben werde, eine schon länger beabsichtigte gedrängte rein wissenschaftliche völlig strenge Uebersicht der ganzen Mathematik erscheinen lassen zu können. — Merkwürdig ist es, daß die Franzosen, ohne sich gerade ängstlich um strenge Begründung ihrer Principien zu bekümmern, im Fortschreiten in ihrer Wissenschaft den einzig richtigen Weg betreten haben. Diesem Umstande hauptsächlich ist der so höchst glückliche Erfolg ihrer Arbeiten zuzuschreiben. Wir Deutsche werden ihnen erst nach Jahren eines vereinten Wirkens nachkommen; aber deutschem Fleiße wird es vorbehalten bleiben, strenge zu begründen und dann mit Sicherheit fortzusetzen, was jene, ihrem leichter beweglichen Charakter gemäß, zwar schnell und hoch, aber auch leicht und schwankend aufgebaut haben.

wie dies leider auf den meisten Schulen und Universitäten Deutschlands der Fall ist, gar keinen dieser Wege strenge verfolgt, sondern statt der Zahlenlehre ein seltsam wunderliches Gemisch von Zahlenlehre und Größenlehre, in dem nirgends eine Einheit zu finden, statt der Geometrie ein nicht minder verworrenes Gemenge, aus Bruchstücken einzeiner Theile der ganzen Wissenschaft zusammengetragen, zu lehren fortfährt. *)

---

*) Auch gleichen unsere mathematischen Lehrbücher weit eher einer mehr oder minder corrumpirten Geschichte der Elementar-Mathematik, als dieser Wissenschaft selbst. — Es kann mir natürlich nicht einfallen mit dieser oder überhaupt mit meinen Behauptungen weder den Verfassern unsrer Lehrbücher, unter denen sich bekanntlich treffliche Mathematiker befinden, noch überhaupt den Lehrern der Mathematik im Allgemeinen zu nahe treten zu wollen. Ich studire täglich die Werke Anderer um aus ihnen zu lernen, und wer zweifelt daran, daß nicht mehrere unsrer bessern Lehrbücher von vorzüglichem Nutzen sind, wenn sie meiner Meinung nach auch nicht für unsre Schulen passen? Wer zweifelt daran, daß nicht einige, wenn auch wenige, Lehrer mit vorzüglichem Erfolg unterrichten, auch wenn sie ihren eigenen verschiedenen Weg gehen, da immer der Haupt-Erfolg des Unterrichts von der Energie des Lehrers abhängt, und der Unterricht von diesem wenigstens theilweise, wenn auch nicht im Ganzen, consequent durchgeführt wird? — Aber es ist hier nicht von einzelnen Ausnahmen, sondern vom Allgemeinen die Rede, und meine

Haben die Lehrer der Mathematik diesen Umstande genugsam beherzigt, so ist dann in Bezug auf äussere Einrichtung des Unterrichts nöthig:

a) Daß an den gelehrten Schulen nur in den 3 obern Klassen, aber in jeder wöchentlich 6 Stunden mathematischer Unterricht ertheilt werde. In manchen Fällen kann es dienlich seyn den Unterricht mit einigen Stunden schon in der 4ten Klasse zu beginnen. In den untern Klassen muß statt des mathematischen Unterrichtes ein zweckmäßiger Unterricht im praktischen Rechnen statt finden (auch in jeder Klasse wöchentlich 6

Sprache ist deswegen so stark, weil das Uebel zu sehr eingewurzelt ist, als daß ohne eine gänzliche Reform viel zu hoffen seyn dürfte, und weil es mich schmerzt an der geistigen und wissenschaftlichen Ausbildung unsrer Jugend so viel vernachläßigt sehen zu müssen. — Ganz unter aller Kritik und akademischer Vorlesungen völlig unwürdig ist z. B. der Vortrag der sogenannten reinen Elementar-Mathematik (auch wohl der Algebra) auf unsern Universitäten. Sind aber die Professoren immer daran Schuld? Wie kann er anders seyn, wenn, wie dies wirklich der Fall ist, die Zuhörer den Schulunterricht mit dem Universitätsvortrag vertauscht haben, ohne den geringsten mathematischen oder vielmehr wissenschaftlichen Geist, folglich auch ohne die geringsten Kenntnisse aus jenen mitgebracht zu haben? Eine einzelne Ausnahme kann an dem Ganzen nichts ändern. — — —

Stunden), damit die Schüler die nöthige Fertigkeit im Rechnen in die obern Klassen mitbringen, indem es nicht Sache des mathematischen Unterrichts seyn kann, sich durch diese praktischen Uebungen durchzuschleppen oder wegen Mangel jener Fertigkeit bey jedem Schritt in seinem Vordringen auf die kleinlichste Art aufgehalten zu werden.*)

b) Daß der mathematische Unterricht wo möglich nur von einem einzigen Lehrer gegeben, oder doch von einem geleitet werde, damit er an der ganzen Anstalt consequent durchgeführt werde.

c) Daß ein zweckmäßiges Compendium zur Grundlage diene.

Da es dem Lehrer nicht um Erlernung

*) So lange man an gelehrten Schulen keinen richtigen Gesichtspunkt für den mathematischen Unterricht hat, wird man auch keinen richtigen für den Rechenunterricht haben. Es bleibt ein großer Mißgriff, wenn man auf den Rechenunterricht auf Gymnasien so wenig Rücksicht nimmt. Nichts schärft den Verstand und die Urtheilskraft der Schüler in den untern Klassen mehr, als ein guter Rechenunterricht, und nichts liegt auf dem Erwachsenen lästiger als die Unkenntniß einer Sache, die in das ganze Leben mit so entschiedenem Einflusse eingreift. — Wie der Rechenunterricht an Gymnasien betrieben werden müsse, wenn er von Erfolg und zugleich in Bezug auf den in den höhern Klassen folgenden mathematischen Unterricht, consequent seyn soll, erhellet aus meinem Rechenbuche. Berlin 1818.

der Sätze, sondern nur um Entwicklung und eine solche Befähigung der Geisteskräfte der Schüler zu thun seyn muß, daß dieser selbstthätig die Wissenschaft aus ihrem Gegenstande ableiten könne, ohne etwas anders als eine unmerkbare Leitung des Lehrers nöthig zu haben, so darf dieses Compendium nicht die Ausführung der Beweise, sondern nur ein völlig strenges System der Wissenschaft aufstellen, damit der Schüler das Ganze leichter übersehen und die einzelnen Theile zuerst unter Anleitung des Lehrers in der Stunde, dann schriftlich zu Hause nach seiner erworbenen Denkfähigkeit ausführen könne.

Vorliegender Leitfaden der Geometrie ist diesen Erfordernissen gemäß ausgearbeitet worden. Ich pflege mich dessen auf folgende Weise mit äusserst glücklichem Erfolg zu bedienen. *)

Geometrie und Zahlenlehre (in meinem Sinne) trage ich in abwechselnden Stun-

*) Der Erfolg kann nur dann glücklich genannt werden, wenn ohne Ausnahme alle Schüler, die nicht überhaupt gänzlich in ihrer Ausbildung zurückbleiben, in den wahren mathematischen Geist eindringen und dadurch fähig werden, nicht einzelne Bruchstücke aus dem Gedächtniß unvollkommen wiedergeben, sondern eigne Untersuchungen anstellen und beendigen, überhaupt die Elemente nach Zwecken anwenden zu können.

den zugleich vor, mit der größten Sorgfalt auf völlig sprachrichtige Zergliederungen und präcise Erklärungen sehend; immer, besonders bey den Begriffen, die man mit einerley Namen bezeichnet, wachend, daß nie ein arithmetischer Begriff in die Geometrie, aber auch nie ein geometrischer Begriff in die Zahlenlehre übergetragen werde.

Am längsten verweile ich mich zuerst bey den 7 Sätzen der Summen und der Differenzen (§. 10) von Linien (§. 23) von Winkeln. Ich lasse sie (von den noch wenig gebildeten Schülern) für Linien und Winkel mit immer veränderter Anordnung der dazu gehörigen Figur vielemale durchbeweisen (ohne jedoch den freyen Ideengang der Schüler zu hemmen). Die Sätze (§. 12) und (§. 25) lasse ich dann auch keine Weise als selbstständige Sätze behandeln, sondern lasse nur angeben, aus welchen der gedachten 7 Sätze sie unmittelbar als besondere Fälle hervorgehen. Dagegen verweile ich dann wieder gehörig lang bey den folgenden 4 Sätzen (§. 27) die als eigenthümliche Sätze wieder besonderer Beweise bedürfen. Die dann folgenden Sätze der Winkel können keine Schwierigkeit machen und so gelange ich schnell zu den 10 Sätzen (§§. 39. 40.) nachdem ich vorher sehr genau den Unterscheid zwischen congruenten und gleichen Flächen habe bemerken lassen und auch

die Verschiedenheit der Beweise), die daraus für die Sätze (§. 36) hervorgeht. Von den Sätzen (§§. 39. 40), welche wieder als Hauptsätze in Bezug auf die Dreyecke da stehen, lasse ich so viel Beweise auffinden und so mannigfaltige, als es nur immer möglich ist, doch nur solche, die nach diesem System strenge sind, ohne mich indessen gerade an die Ordnung dieser 10 Sätze selbst zu binden, indem ich solche als zusammengehörig betrachte. Sind aber diese auf so viel verschiedene Weise besprochen, als solches nur immer möglich war *), so geht es rasch durch alle die Sätze (§. 41) hindurch, überall nur so lange verweilend, bis die Schüler gezeigt haben, wie solche (alle) unmittelbar als besondere Fälle der Sätze (§. 39 und §. 40) aus diesen hervorgehen, wobey ich nie Schwierigkeiten gefunden habe. Die Sätze in der Anmerk. (§. 41) betrachte ich als Uebungssätze, um die erworbene Denkfähigkeit noch mehr daran zu erproben, und nur durch leise Fingerzeige nachhelfend, gelingt ihr Beweis nicht minder gut. Gar

---

*) Ueber die Methode Schüler zur Selbstthätigkeit im Auffinden der Beweise zu bringen, siehe: Dr. G. S. Ohm's (jetzt am Gymnasio zu Cölln) Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheren Bildungsmittels an vorbereitenden Lehranstalten. Erlangen 1817.

keine Schwierigkeit machen dann die 3 Hauptsätze (§. 42), die ich nur dem Gedächtniß einpräge, weil dann alle übrigen (§. 43) mit jenen zugleich behalten werden. Bey den Sätzen der Proportionen (§§. 44. 45. 46) halte ich mich nun sehr lange auf, sie immer wiederholend, doch mit solcher Mannigfaltigkeit der Darstellung, daß die Schüler dem Gegenstand immer auf's neue ihre Aufmerksamkeit schenken; aber dann müssen sie die im (§. 47) folgenden schnell und ohne Verzug als besondere Fälle aus jenen allgemeinen ableiten, welches gewöhnlich mit so vieler Leichtigkeit geschieht, daß ich mich nur noch kurz bey den 2 Hauptsätzen (§. 48) zu verweilen habe, um nach wenigen Stunden die Planimetrie von den Schülern selbst als beendigt sehen zu können. Erst mit denjenigen Schülern, die sich durch mehrmalige Wiederholung desselben Ganges nicht bloß die nöthige Fähigkeit, sondern auch zugleich Fertigkeit im Denken erworben haben, beginne ich dann die Stereometrie, die ich nach denselben Grundsätzen und auf dieselbe Weise wie vorher die Planimetrie betreibe, d. h. Satz um Satz mit der größten Strenge und größtmöglichsten Evidenz beweisen lasse, bloß bey den im System als Hauptsätze, besonders herausgehobenen verweile, die übrigen aber als unmittelbare Folgerungen schnell (jedoch auch hier immer mit der größten

Strenge) beseitige. Die Stereometrie ist der wichtigste Theil des geometrischen Unterrichts, indem er es erst ist, welcher die Bildung des Mathematikers zu einer gewissen Vollendung bringt. Daß sie gewöhnlich so ganz erbärmlich betrieben wird, beweißt allein hinlänglich, daß die meisten Schüler dergleichen derbere Kost nicht vertragen können, und nicht dazu angehalten worden sind, sie vertragen zu lernen.

In Bezug auf den rechnenden Theil glaube ich nichts weiter bemerken zu müssen, als daß ich in der Zahlenlehre unterdessen so weit vorgerückt bin, daß meine Schüler Gleichungen sehr fertig zu behandeln wissen, (auch quadratische); so daß dieser Theil mit Inbegriff der Trigonometrie als eine leichte algebraische Aufgabe betrachtet wird, deren Lösung nie Schwierigkeiten machen kann.

Indem ich hier angegeben habe, wie ich selbst nach diesem Leitfaden zu unterrichten pflege, wollte ich nur im allgemeinen auf das wesentlichste hindeuten; der verständige Lehrer wird seinen Weg nach den besondern Umständen selbst ändern, und nachholen, was ich anzugeben vergessen habe. So z. B. ist ein Hauptaugenmerk bey mir, die ganze Wissenschaft in ihren Hauptsätzen (also eigentlich das Skelett) so oft wie möglich, zuweilen einigemale in einer Woche, zu wiederholen, damit der Schüler so bald wie möglich eine Uebersicht des Ganzen er-

lange, die ihm von großem Nutzen ist, und alle seine Schritte erleichtert.

Soviel über den Hauptzweck des Werkchens. In so fern ich aber glaube, daß nur auf diesem Wege die Geometrie mit völliger Strenge und Evidenz ihrer Sätze behandelt ist, und in so fern ich überzeugt bin, daß diese Wissenschaft und ihr Verhältniß zur Zahlenlehre und zur ganzen Mathematik in diesen Bogen zum ersten mal ihrer Würde gemäß rein und klar aufgestellt ist, hoffe ich durch die Bekanntmachung ihres Inhalts auch den reinen Wissenschaftsforschern eine kleine Freude und sie dadurch geneigt zu machen, kleine zufällige Mängel, die ich bey meinen häuslichen und bürgerlichen Verhältnissen nicht vermeiden konnte, mit Schonung zu übergehen.

Thorn im Januar 1819.

Dr. M. Ohm.

Elementar-Geometrie.

Einleitung.

§. 1.

Die Vorstellung des Raumes und seiner drey Richtungen (Dimensionen) ist uns gegeben. Ein begrenzter Theil des als unendlich gedachten Raumes heißt ein Raumkörper (oder Körper); die Grenzen desselben nach zwey Richtungen, heißen Raumflächen (oder Flächen); die Grenzen dieser nennt man Raumlinien (oder Linien), und die Grenzen der Linien sind Punkte. Körper, Flächen und Linien nennt man auch Raumgrößen oder Ausdehnungen, ausgedehnte Größen.

Unsrer Art die Gegenstände aufzufassen, ist es aber angemessener zu sagen:

1) ein Punkt ist ein Ort im Raume, von welchem eine Begrenzung ausgeht (ist also selbst noch keine Ausdehnung);
2) eine Linie ist die Bahn eines bewegten Punktes;
3) eine Fläche ist die Bahn einer, in einer zweiten Richtung bewegten Linie;
4) ein Körper ist die Bahn einer, in einer dritten Richtung bewegten Fläche.

§. 2. Es entsteht eine gerade oder krumme Linie, je nachdem der beschreibende Punkt in einer Richtung fortgeht, oder stetig seine Richtung ändert.

Eine ebene Fläche (Ebene) ist diejenige, in welcher alle Punkte einer geraden Linie nach allen Richtungen zu, liegen können. Im Gegentheil heißt die Fläche krumm.

§. 3. Eine Kreislinie ist die Bahn des Endpunkts einer geraden Linie, die sich in einer Ebene um ihren andern Endpunkt herumbewegt. Mittelpunkt, Halbmesser, Durchmesser, Sehne, Bogen.

§. 4. Eine Raumgröße kann um eine andere gleichartige vermehrt und vermindert werden, auch läßt sich untersuchen, wie die eine aus der andern erzeugt werden kann. Das Resultat der beyden ersten Veränderungen ist immer wieder eine Raumgröße, das Resultat der letztern aber sind immer Zahlen. Namentlich erhält man eine Zahl, wenn eine zweite Raumgröße B in einer erstern A ohne Rest enthalten ist. Diese Zahl heißt das Maaß der Raumgröße A durch die andere B gemessen, die Raumgröße B aber heißt das Gemäß, so wie das Geschäft selber durch welches das Maaß gefunden wird, das Messen der Raumgröße A genannt wird.

Nennt man nun die Lehre der Raumgrößen Geometrie, so zerfällt die Geometrie in zwei Haupttheile; 1) einen rein geometrischen Theil, der sich mit der unmittelbaren Vergleichung der Raumgrößen beschäftigt; 2) einen rechnenden Theil, welcher aus gegebenen Maaßen der Raumgrößen, die Maaße anderer Raumgrößen, also aus Zahlen andere Zahlen sucht. Ersterer wird ganz ohne Hülfe der Zahlenlehre zu behandeln seyn, letzterer aber ist nichts

anders als eine Anwendung der Zahlenlehre auf Raumgrößen. *)

Ausserdem zerfällt sie wieder in 1) Elementar-Geometrie und 2) höhere Geometrie. Die erstere davon kann man dann wieder eintheilen in a) Longimetrie; b) Planimetrie; c) Stereometrie.

§. 5. Aus den vorhergehenden Begriffen (§. 2.) gehet unmittelbar hervor:

1) zwey Punkte bestimmen eine gerade Linie der Lage und der Größe nach.
2) Drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, also auch eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr, oder auch zwey gerade Linien, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, bestimmen die Lage einer Ebene.
3) Zwey gerade Linien können nur einen Punkt gemeinschaftlich haben.
4) Zwey Ebenen können nur eine gerade Linie gemeinschaftlich haben.

Anmerk. In der Folge werde ich statt gerade Linie immer bloß Linie setzen.

---

*) Weiter unten werden wir sehen, daß Linien auch durch ihre Maaße bestimmt sind. Da nun Raumsysteme bestimmt sind, so bald alle ihre Grenzpunkte es sind, Punkte aber im Raume durch Linien bestimmt sind, die man von einem fixen Punkt aus der Größe und Lage nach kennt, diese Linien aber durch Maaße, also durch Zahlen gegeben sind; so sieht man leicht ein, wie die rechnende Geometrie sich auch allgemein überhaupt zur Bestimmung von Raumsystemen erstrecken kann. Diese allgemeine Betrachtung der Raumsysteme, die der von den Franzosen so genannten géometrie analytique, (oder auch in anderer Hinsicht géometrie déscriptive) entspricht, werde ich zur Zeit, wie ich es meinen Ansichten gemäß für nöthig erachte, in einem ähnlichen Werkchen zum Behuf unsrer Schulen entwickeln.

Elementar-Geometrie.

Rein geometrischer Theil.

I. Longimetrie.

§. 6.

Gleiche Linien nennt man diejenigen, die mit ihren beiden Endpunkten auf einander fallen können. (Die Richtungen der Linien und die einen Endpunkte müssen natürlich auf einander gelegt werden.) Ungleiche Linien sind dann diejenigen, in welchen bey demselben Verfahren die zweyten Endpunkte nicht auf einander fallen. Größere, Kleinere Linie. Zeichen für diese Verhältnisse.

Gleiche Linien kann man immer für einander setzen, sie unterscheiden sich wesentlich durch nichts mehr von einander; sie sind congruent.

§. 7. 1) Wenn zwey Linien einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

2) Wenn eine Linie größer oder kleiner ist als eine von zwey gleichen Linien, so ist sie auch größer oder kleiner als die andere.

3) Wenn eine Linie größer ist als eine zweyte, diese wieder größer als eine dritte, so ist auch die erste größer als die dritte.

4) Ein Theil einer Linie ist immer kleiner als die ganze.

5) Alle Halbmesser einer Kreislinie sind einander gleich.

Die 3 ersten dieser Sätze werden durch Aufeinanderlegen der Linien mittelst der obigen Erklärungen bewiesen, die beyden andern aus diesen.

§. 8. Eine Linie läßt sich um eine andere vermehren oder vermindern, auch kann man untersuchen, wie die eine aus der andern erzeugt werden kann (wie sich die eine zur andern verhält.) — Dies allein kann Gegenstand der Longimetrie seyn.

§. 9. Durch das Vermehren der Linien wird eine neue Linie (Summe) erzeugt, die so groß ist als die Eine und die Andere (Summenden) zusammengenommen. Durch das Vermindern der Linien wird auch eine neue Linie (Differenz) erzeugt, die mit der Verminderung (Subtrahenden) zusammengenommen, die Verminderte (Minuend) ausmacht. — Unter Addiren und Subtrahiren zweyer Linien verstehe ich nichts anders als dieses Vermehren und Vermindern.

Zeichen dafür.

Fig. 1. §. 10. 1) Zwey Summen AB und DG sind gleich, sobald ihre Summenden gleich sind; d. h. sobald AC = DH und BC = GH ist, so ist auch AB = DG.

2) Eine Summe AB ist größer als eine andere Summe DG, wenn die einen Summenden in beyden einander gleich sind, der zweyte Summend der erstern Summe aber größer ist, als der zweyte Summend der andern; d. h. wenn AC = DH und BC > GH, so ist auch AB > DG; oder es ist AB > DG wenn AC > DH und BC = GH ist.

3) Eine Summe AB ist größer als eine andere Summe DG, wenn die einzelnen Summenden der einen Summe größer sind, als die in der andern; d. h. wenn AC > DH und BC > GH, so ist auch AB > DG.

4) Zwey Differenzen sind einander gleich, wenn ihre Minuenden und Subtrahenden einander gleich sind; d. h. wenn AB = DG und BC = GH, so muß auch AC = DH seyn, oder es ist BC = GH, sobald AB = DG und AC = DH ist.

5) Eine Differenz ist größer als eine zweyte, wenn ihr Minuend größer, ihr Subtrahend aber gleich ist dem in der andern Differenz; d. h. wenn AB > DG und AC = DH, so muß BC > GH seyn, oder es ist AC > DH, wenn AB > DG und BC = GH ist.

6) Eine Differenz ist größer als eine zweyte, wenn die Minuenden gleich sind, der Subtrahend der erstern aber kleiner ist, als der in der andern, d. h. wenn AB = DG und AC < DH, so muß BC > GH seyn; oder es ist AC > DH, wenn AB = DG und BC < GH ist.

7) Eine Differenz ist größer als eine andere, wenn ihr Minuend größer, ihr Subtrahend aber kleiner ist, als in der andern, d. h. wenn AB > DG und AC < DH ist, so muß BC > GH seyn, oder es ist AC > DH, wenn AB > DG und BC < GH ist.

Diese 7 Sätze sind vorzüglich zu bemerken. Sie werden leicht bewiesen durch Aufeinanderlegen der Linien in einem der 3 Paar Punkte. Da es willkührlich ist, welche Punkte man zuerst aufeinander legt, so können die Beweise auch auf mancherlei Art abgeändert werden.

§. 11. Sind die beiden Summenden einer Summe einander gleich, so heißt jeder die **Hälfte** der ganzen Linie, welche ihrerseits das **doppelte** der erstern genannt wird.

Da jede Summe, jede Differenz zweyer Linien selber wieder eine Linie ist, so kann es Summen mehrerer Summenden, auch Linien geben, die aus mehreren andern theils durch Addition, theils auch durch Subtraction zusammengesetzt sind. Daher entstehen dann die 3ten, 4ten, 2c. **vielten** Theile, so wie auch die Begriffe des 3, 4, 2c. **vielfachen** einer Linie. Bezeichnung dafür. *)

§. 12. An folgenden Sätzen kann man die Anwendung vorstehender Elementar-Sätze einüben:

1) Wenn mehrere Linien addirt werden, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man sie addirt; immer kommt doch dieselbe Summe.

Fig. 2. 2) Wenn AC = BD, so ist auch AD = BC.

3) Wenn AD = BC, so ist auch AC = BD.

4) Wenn die Hälfte zweyer Linien einander gleich sind, so sind auch die ganzen Linien einander gleich.

5) Wenn die Hälfte einer Linie größer ist, als die Hälfte einer andern, so ist auch die ganze erste Linie größer als die zweyte.

6) Wenn zwey Linien einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften einander gleich.

7) Wenn eine Linie größer ist, als eine andere, so ist auch die Hälfte der erstern größer als die Hälfte der zweyten. (Beyde letztern Sätze werden indirect erwiesen.)

---

*) Man kann hier, wie bei den frühern Begriffen, die gewöhnlichen Zeichen beibehalten. Nur dürfen dann die Zeichen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 2c. nicht im arithmetischen Sinne, d. h. nicht als Brüche, sondern als bloße Zeichen betrachtet werden.

8) Linien sind einander gleich, wenn sie aus gleich vielen gleichen Linien durch Addition und Subtraction zusammengesetzt sind.

9) Wenn die Drittheile, Viertheile rc. zweyer Linien einander gleich sind, so sind auch die ganzen Linien einander gleich.

10) Wenn das Drittheil, Viertheil, rc. einer Linie größer ist, als das Drittheil, Viertheil rc. einer andern, so ist die erste Linie selbst größer als die zweyte.

11) Die beyden letztern Sätze auch umgekehrt. (Wird indirekt erwiesen.)

Fig. 3. 12) Wenn AB in N halbirt und zugleich AC = BD ist, so ist auch CD in N halbirt.

13) Wenn CD in N halbirt und zugleich AC = BD ist, so ist auch AB in N halbirt.

14) Wenn AB und CD zugleich in N halbirt sind, so muß auch AC = BD seyn.

15) Alle Durchmesser einer Kreislinie sind einander gleich.

Alle diese und unendlich viele ähnliche Sätze werden dadurch erwiesen, daß man zeigt: die Linien, welche gleich oder ungleich seyn sollen, sind entweder Summen oder Differenzen, auf welche man dann die 7 Sätze des §. 10. anwendet.

Fig. 4. §. 13. Untersucht man, wie von zwey Linien eine aus der andern erzeugt werden kann, so untersucht man das **Verhältniß** der beiden Linien. Dieses Verhältniß z. B. von AB zu CD wird immer bestimmt durch 2 Zahlen, die anzeigen, wie viel mal eine dritte gemeinschaftliche Linie auf beyden gegebenen Linien AB und CD ohne Rest abgetragen werden kann *). Ist diese dritte (das **Gemäß** ge-

*) Eine solche dritte Linie muß es immer geben;

nannt) der CD gleich, so daß die CD selber in AB ohne Rest enthalten ist, so ist die zweyte Zahl immer die Eins, und in diesem Falle ist das Verhältniß schon durch eine einzige Zahl bestimmt. Dann sagt man: AB läßt sich durch CD messen, und man nennt CD das Gemäß, so wie die Zahl die bey dem Messen sich ergiebt das Maaß *).

Fig. 3. Anmerk. Trägt man die CD auf AB, dann den Rest BP wieder auf CD, den hier bleibenden Rest DR auf den vorigen Rest BP u. s. f. ab, bis endlich kein Rest mehr bleibt, so ist der letzte Rest die dritte Linie (das Gemäß) mit der man AB und CD (ohne Rest) messen kann. Die Maaße die man erhält, und welche beyde das Verhältniß von AB zu CD bestimmen, hängen dann bloß von den Zahlen ab, die sich hier bey obigem Abtragen ergeben haben; so daß wenn diese bey zwey andern Linien dieselben sind, auch jene dieselben werden müssen, und umgekehrt. Ist z. B. CD in AB 3 mal, der Rest BP in CD 2 mal und der neue Rest DR in BP 4 mal enthalten, so daß dann kein Rest mehr bleibt, so hat man BP = 4 DR, CR = 2 BP = 8 DR, CD = 9 DR, AP = 3 CD = 27 DR, AB = 31 DR. Das Verhältniß von AB zu CD wird bestimmt durch die beiden Zahlen 31 und 9 und diese Zahlen hängen von den oben erhaltenen Zahlen 3, 2, 4 einzig und allein ab. — Wie vermöge des Verhältnisses von AB zu CD d. h. vermöge der beyden Zahlen 31 und 9 jede Linie aus der andern erzeugt werden kann, sieht man sogleich ein. Man theilt die AB in 31 Theile, so hat man DR, das man dann 9 mal nimmt, um die CD zu bekommen; oder man

---

denn, da der Rest immer kleiner ist, als die abzutragende Linie, so darf man diese letzte nur so klein nehmen, daß es keine kleinere mehr giebt, und es wird auch keinen Rest mehr geben.

*) Daß man gewöhnlich Maaß und Gemäß mit einander verwechselt, ist bey dem Vortrag der Geometrie und zwar der Lehre vom Messen (in dem rechnenden Theil der Geometrie) hinsichtlich der Klarheit ein bedeutendes Hinderniß.

theilt die CD in 9 gleiche Theile, so hat man ebenfalls DR, welches man dann nur 31 mal nehmen darf, um AB zu haben. Es versteht sich, daß hier nicht von Bestimmung der Zahlen, also auch nicht von bestimmten Zahlen die Rede seyn kann, indem dies dem rechnenden Theil überlassen bleiben muß. Das Zahlensystem wird also hier nicht vorausgesetzt, so wenig als irgend ein anderer Begriff aus der Arithmetik.

§. 13.* Man hat sogleich:

1) Gleiche Linien haben gleiche Maaße.

2) Eine größere Linie hat ein größeres Maaß.

3) Linien die gleiche Maaße haben, sind einander gleich.

4) Eine Linie die ein größeres Maaß hat, ist die größere, so lange nehmlich das Gemäß dasselbe ist.

§. 14. Zwey Verhältnisse sind einander gleich, wenn beyde durch dieselben Zahlen bestimmt werden. Sind also M, N, P, Q, 4 Linien, und haben M zu N und P zu Q gleiche Verhältnisse, so will das nichts weiter sagen, als daß es eine dritte Linie für M und N und auch eine dritte Linie für P und Q giebt, mit denen M und N und P und Q gemessen werden, so daß die Maaße, die sich für M und P ergeben, dieselben sind, so wie auch diejenigen, die sich für N und Q ergeben. Die Linien M und P selber sind deswegen nicht nothwendig einander gleich, so wenig als N und Q. Sie würden es nur dann seyn, wenn die beyden Gemäße, das womit M und N, so wie auch das womit P und Q gemessen wurden, nicht verschieden wären. — Bezeichnet M : N das Verhältniß von M zu N (so wie N : M das umgekehrte Verhältniß, nehmlich das von N zu M) so kann man die Gleichheit obiger Verhältnisse ausdrükken durch das Zeichen

$M : N = P : Q$, welches man dann eine (geometrische) Proportion nennt.

§. 15. Hat man die Proportion

$$M : N = P : Q$$

so erhellet sogleich aus dem Begriff von Verhältniß und Proportion, daß auch seyn müsse:

1) $N : M = Q : P$
2) $M + N : N = P + Q : Q$
3) $M - N : N = P - Q : Q$
4) $M + N : M = P + Q : P$
5) $M - N : M = P - Q : P$, etc. etc. etc.

wo statt $M - N$, $P - Q$, die andern Differenzen $N - M$, $Q - P$ gesetzt werden müssen, im Falle $N > M$ oder $Q > P$ wäre. Auch kann man zuvor ableiten aus §. 12. Nr. 9. 10. 11.:

6) Ist $M \gtreqless N$, so ist auch $P \gtreqless Q$.

7) Ist $M \gtreqless P$, so ist auch $N \gtreqless Q$.

Die Beweise müssen alle streng geführt werden.

§. 16. Jeder Kreisbogen läßt sich durch fortgesetzte oder rückwärts gehende Umdrehung seiner beschreibenden Linie gerade so um einen andern vermehren oder vermindern, auch kann gerade so untersucht werden wie 2 Kreisbogen sich auseinander erzeugen, wie wir solches im vorstehenden für gerade Linien gehabt haben. Daher gilt alles für gerade Linien in §§. 6 — 15 Gesagte auch hier für die Kreisbogen, die zu einerlei Kreislinien gehören, also auch für solche Kreisbogen, die zu Kreislinien von einerlei Halbmesser gehören, und es muß solches hier gehörig wiederholt vorgetragen werden.

Elementar-Geometrie.

Rein geometrischer Theil.

II. Planimetrie.

§. 17.

Fig. 5. Die Fläche ABC, die von den beiden unbegrenzten Linien AB, BC, begrenzt, von der dritten Seite aber unbegrenzt ist, heißt Winkelfläche oder Winkel. Nach §. 1. ist aber angemessener gesagt: ein Winkel ist die Bahn der in einer Ebene sich um den Punkt B drehenden unbegrenzten Linie AB. Die unbegrenzten Linie AB, BC, (die nur einen Endpunkt haben) heißen die Schenkel; der Punkt B die Spitze, Scheitelpunkt des Winkels. Bezeichnung.

§. 18. Geht die BA fort durch BD, BC, bis sie gerade in ihre Verlängerung BE kommt, so heißt der Winkel EBA ein flacher Winkel; bewegt sich dann BA noch weiter, so erhält man einen erhabenen Winkel, so wie der Winkel ein hohler Winkel genannt wird, der entsteht, wenn sich die BA durch BD ꝛc. aber nicht bis zu BE bewegt. Diese 3 Arten von Winkeln gehören noch zu den Winkeln der ersten Gattung; dagegen gehören die Winkel zur zweyten, drit-

ten u. s. w. Gattung, wenn sich die BA erst einmal oder zweymal ꝛc. ganz herumgedreht hat, und immer erst wieder in sich selbst zurückgekehrt ist, ehe sie, sich noch etwas fortbewegend, die Lage des andern Schenkels bestimmte.

Anmerk. Hier soll für's erste nur von Winkeln der ersten Gattung die Rede seyn.

§. 19. Hieraus folgt:

1) Durch den Winkel (Fläche, die auf einer Seite unbegrenzt) ist die Lage der beyden Schenkel zu einander, also die Lage von einer Linie zur andern völlig bestimmt.

2) Zwey sich schneidende Linien BA und BC bilden immer 2 Winkel der ersten Gattung, einen hohlen und einen erhabenen, übrigens aber unzählig viele Winkel höherer Gattungen.

3) Ein hohler und ein erhabener Winkel, desgleichen unzählig viele Winkel höherer Gattungen können daher eine und dieselbe Lage zweyer Linien bestimmen.

§. 20. Denkt man sich 2 Winkel mit ihrer Spitze und mit ihren ersten Schenkeln auf einander gelegt, so sagt man: sie sind beyde einander gleich, wenn die zweyten Schenkel auch auf einander fallen, dagegen nennt man sie ungleich, (größer, kleiner), wenn die zweyten Schenkel nicht auf einander fallen.

Bezeichnung.

Gleiche Winkel kann man immer für einander setzen, sind congruent.

§. 21. 1) Alle flache Winkel sind einander gleich.

2) Wenn zwey Winkel einem dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

3) Wenn ein Winkel größer oder kleiner ist als einer von 2 gleichen Winkeln, so ist er auch größer oder kleiner als der andere.

4) Wenn ein Winkel größer ist als ein zwey-

ter, der zweyte wieder größer als ein dritter, so ist auch der erste größer als der dritte.

5) Ein Theil eines Winkels ist immer kleiner als der ganze Winkel.

Diese Sätze werden durch Aufeinanderlegen der Winkel unmittelbar aus den Erklärungen erwiesen.

§. 22. Ein Winkel läßt sich um einen andern Winkel vermehren oder vermindern, auch läßt sich untersuchen, wie der eine aus dem andern erzeugt werden kann. Daher gerade wie bey den Linien das Addiren, Subtrahiren, Summen, Differenz, Summenden, Minuend und Subtrahend und Zeichen dafür. — Ferner ergeben sich hier gerade so, wie früher bey den Linien, die Begriffe von Hälften, Doppelten Drittheilen, Viertheilen rc. der Winkel, desgleichen dreyfachen, vierfachen rc. Winkeln u.s.w. Auch dieselbe Bezeichnung; welches alles hier gehörig wiederholt werden muß.

§. 23. Nun folgen die 7 Sätze von den Summen und Differenzen der Winkel, die (§. 10.) für Linien aufgestellt sind. Die Beweise werden auch hier wieder durch Aufeinanderlegen geführt *).

§. 24. Nebenwinkel nennt man zwey Winkel die einen gemeinschaftlichen Schenkel und eine gemeinschaftliche Spitze haben und deren Summe einem flachen Winkel gleich ist. Ein rechter Winkel heißt derjenige, dessen Nebenwinkel ihm gleich ist. Die beyden Schenkel des rechten Winkels stehen auf einander senkrecht. Hohle Winkel sind stumpf oder spitz, je nachdem sie

*) Alle obigen Erklärungen, alle hier erwähnten Sätze mit ihren Beweisen muß der Schüler gehörig wiederhohlen; nicht minder müssen alle folgende Sätze der Linien, die für Winkel ebenfalls gelten, hier für Winkel noch besonders wiederholt werden.

größer oder kleiner als ein rechter Winkel sind. Scheitelwinkel.

§. 25. Als unmittelbare Anwendungen der 7 Sätze von den Summen und Differenzen der Winkel, folgen nun die ersten 14 Sätze (§. 12.) für Winkel abgeändert, übrigens wörtlich. Zu diesen kann man aber hier noch folgende hinzufügen:

15) Alle rechten Winkel sind einander gleich (weil sie Hälften der (gleichen) flachen Winkel sind).

16) Die Summe zweyer Nebenwinkel ist immer der Summe je zweyer andern Nebenwinkel gleich, also auch der Summe von zwey rechten Winkeln.

17) Die Nebenwinkel gleicher Winkel sind auch einander gleich.

18) Scheitelwinkel sind einander gleich.

19) Wenn ein Winkel größer ist, als ein anderer, so ist sein Nebenwinkel kleiner als der des andern.

20) Die Summe zweyer stumpfen Winkel ist größer, die zweyer spitzen Winkel aber kleiner als ein flacher Winkel.

Fig. 6. 21) Wenn der Winkel GAD = GBF ist, also wenn

1) $x = p$ ist,

so muß auch seyn:

2) $x = n$
3) $v = p$
4) $v = n$
5) $y = q$
6) $y = m$
7) $z = m$
8) $z = q$
9) $x + q = \pi$
10) $y + p = \pi$
11) $z + n = \pi$

12) $v+m=\pi$.

wo π den flachen Winkel bezeichnet und so oft eine dieser 12 Gleichungen gegeben ist, müssen die übrigen folgen. Dies allein giebt 132 Sätze.

22) Ist aber

1) $x > p$

so muß auch seyn:

2) $x > n$
3) $v > p$
4) $v > n$
5) $y < q$
6) $y < m$
7) $z < m$
8) $z < q$
9) $x+q > \pi$
10) $y+p < \pi$
11) $z+n < \pi$
12) $v+m > \pi$

und so oft irgend eine dieser 12 Ungleichungen gegeben ist, müssen die übrigen alle folgern. Dies giebt wiederum 132 Sätze. Dabey heißen die Winkel y und m, so wie v und p Wechselwinkel x, z, q, n, äussere, y, p, v m, aber innere Winkel.

Bey allen diesen Sätzen in den 22 Nummern und bey einer unendlichen Zahl ähnlicher, die man aufstellen könnte, hat man nie etwas anders zu thun, als nachzuweisen, daß die gleich oder ungleich seyn sollenden Winkel Summen oder Differenzen sind. Die 7 Sätze (§. 23.) geben dann unmittelbar das Resultat.

§. 26. Nun folgen die Sätze (§§. 13—15) hier für Winkel abgeändert, übrigens wörtlich.

Anmerk. Stellt man sich vor, daß bey der Construktion des Winkels ein Punkt der Umdrehungslinie einen Kreisbogen construire, oder daß in zwey Winkeln von dem Umdrehungspunkt gleich

weit entfernte Punkte Kreisbogen construirt haben, so erhellet sogleich aus dem Aufeinanderlegen der Winkel und Bogen:

1) Gleiche Winkel haben gleiche Bogen.
2) Größere Winkel haben größere Bogen.
3) Zu gleichen Bogen gehören gleiche Winkel.
4) Zum größern Bogen gehört auch ein größerer Winkel.
5) Wenn ein Winkel das zweyfache, dreyfache ꝛc. eines andern ist, so findet dasselbe Verhältniß auch zwischen ihren Bogen statt; und umgekehrt.
6) Ueberhaupt verhalten sich zwey Winkel zu einander wie die zugehörigen Bogen.

§. 27. Noch sind von den Winkeln folgende 4 Sätze zu merken:

Fig. 6. I. Wenn eine von den 12 Gleichungen (§. 25. Nr. 21.) gegeben ist, so können sich die Linien CD und EF nie schneiden.

II. Wenn zwey Linien CD und EF sich nie schneiden, so muß eine von den 12 Gleichungen, also müssen dann alle 12 Gleichungen (§. 25. Nr. 21.) statt finden.

III. Wenn eine der 12 Ungleichungen des §. 25. Nr. 22. statt findet (wo sie dann alle statt finden), so schneiden sich die Linien CD, EF, oberhalb GH, da wo die äußern Winkel größer sind als die innern.

IV. Wenn sich zwey Linien CD und EF schneiden, so müssen im Falle sie beyde von einer dritten Linie GH geschnitten werden, auf dieser Seite die äußern Winkel größer seyn als die innern, und es müssen daher alle 12 Ungleichungen (§. 25. Nr. 22.) statt finden.

Der erstere Satz wird erwiesen, indem man die untere Figur GABE auf die obere FBAD dergestalt legt, daß die gleichen Winkel m und y

auf einander fallen; dann fallen auch die Winkel v und p auf einander und es liegt also BE auf AD und CA auf BF. Schnitten sich nun AD und BF, so schnitten sich AC und BE, d. h. die Linien CD und EF würden sich dann in zwey Punkten schneiden, was nicht möglich ist. Folglich können sich die Linien CD und EF nie schneiden.

Der zweyte Satz kann auf folgende Art anschaulich gemacht werden: Die Lage zweyer Linien CD und EF hängt bloß von den Winkeln x und p ab, die sie mit einer und derselben dritten Linie bilden, also davon, ob der äussere Winkel größer, gleich, oder kleiner als der innere ist. Schneiden sich nun die Linien CD, und EF nie, so haben sie oberhalb und unterhalb GH gleiche Beschaffenheit. Was daher oberhalb von der Lage der Linien AD und BF gilt, muß auch unterhalb GH von den Linien AC und BE gelten. Wäre also oberhalb der äussere Winkel x größer als der innere p, so müßte auch unterhalb der äussere Winkel z größer seyn als der innere m. Wäre $x < p$ so müßte auch $y < m$ seyn. Wäre $x = p$ so müßte auch $y = m$ seyn.

Da nun nach (§. 25. Nr. 21. 22.) nur die letzten beyden Bedingungen sich mit einander vertragen, indem nie zugleich $x > p$ und $y > q$, eben so nie zugleich $x < p$ und $y < q$ seyn kann, so findet auch nur das letztere statt, d. h. es ist allemal $x = p$, $y = q$ und es existiren überhaupt immer die 12 Gleichungen (§. 25. Nr. 21).

In Bezug auf den dritten Satz wird zuerst indirekt bewiesen, daß sich die Linien schneiden; wo sie sich aber schneiden, folgt dann aus einem ähnlichen Aufeinanderlegen des obern und des untern Theils, wie bey dem Beweise des erstern Satzes statt fand.

Der vierte Satz endlich folgt rein indirekt.

§. 28. Linien die sich nie schneiden, heißen Parallellinien oder parallele, gleichlaufende Linien. Es folgt:

1) Wenn zwey Linien einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.
2) Zwey Linien, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.
3) Eine Linie, die auf einer andern senkrecht steht, steht auch auf allen mit dieser andern parallelen Linien senkrecht.
4) Eine Linie welche die eine von 2 parallelen Linien schneidet, schneidet auch die andere. (Wird indirekt bewiesen.)
5) Durch einen Punkt läßt sich mit einer der Lage nach gegebenen Linie nur eine parallele Linie ziehen (indirekt).

Fig. 7. §. 29. Durchschneiden sich daher 3 Linien wechselseitig einander in den Punkten A B, I. so finden allemal 36 Ungleichungen statt. Unter diesen sind besonders zu bemerken:

1) Der äussere Winkel x ist immer größer als einer von den beyden innern Winkeln p und d, d. h. es ist immer $x > p$ und zugleich $x > d$.
2) Die Summe je zweyer innern Winkel ist immer kleiner als ein flacher, d. h. es ist $y + p < \pi$, $y + d < \pi$ und $p + d < \pi$.

§. 30. Es finden aber auch noch mehrere Gleichungen statt, worunter vorzüglich zu bemerken:

1) Der äussere Winkel x ist immer der Summe der beyden innern Winkel d und p gleich; d. h. es ist $x = d + p$.
2) Die Summe der drei innern Winkel ist immer gleich einem flachen Winkel; d. h. es ist $y + d + p = \pi$.

Von diesen Gleichungen kann man sogleich die Beweise führen, sobald man nur durch einen der 3 Punkte A, B oder I mit einer der 3 Linien eine parallele Linie zieht.

Diese Sätze machen den Uebergang zu der Lehre von den Dreiecken und überhaupt von den völlig begrenzten Flächen.

§. 31. Ein Dreieck ist eine von 3 Linien begrenzte Fläche. Ein solches hat immer 3 Seiten und 3 Winkel. Viereck, Fünfeck rc. Vieleck. Gleichseitiges, gleichschenkliches, ungleichseitiges, rechtwinkliches, stumpfwinkliches, spitzwinkliches Dreieck.

§. 32. Es erhellet unmittelbar aus dem vorhergehenden:

1) Der äussere Winkel der entsteht, wenn eine Seite des Dreiecks verlängert wird, ist grösser als einer von den beyden innern des Dreiecks und gerade so groß als die Summe beyder.

2) Die 3 Winkel eines Dreiecks machen zusammen einen flachen Winkel aus.

3) Ist ein Winkel im Dreieck ein rechter, so ist die Summe der beyden andern auch gleich einem rechten, daher jeder einzelne spitz.

4) Von einem Punkt in einer Linie oder ausserhalb derselben ist auf die Linie selbst nur eine senkrechte möglich.

5) Ist ein Winkel im Dreieck ein stumpfer, so ist die Summe der beyden andern kleiner als ein rechter Winkel, folglich jeder einzelne spitz.

6) Sind in einem Dreieck zwey Winkel einander gleich, so muß jeder dieser beyden spitz seyn.

7) Sind alle 3 Winkel einander gleich (in e-

nem Dreieck) so ist ein jeder das Drittheil von einem flachen Winkel.

8) Sind in zwey Dreiecken zwey Winkel des einen zweyen Winkeln des andern gleich, so ist auch der dritte dem dritten gleich.

9) In einem Viereck ist die Summe aller 4 Winkel gleich zweyen flachen.

10) In einem Fünfeck macht die Summe aller 5 Winkel 3 flache Winkel aus.

11) In einem Vieleck ist die Summe aller Vielecks-Winkel gleich so vielen flachen Winkeln als das Vieleck Seiten hat, weniger zwey flachen. (Wird bewiesen indem man aus einem beliebigen Punkt in der Fläche des Vielecks nach allen Ecken gerade Linien zieht.)

§. 33. Eine begrenzte Fläche läßt sich um eine andere begrenzte Fläche vermehren oder vermindern, auch kann man untersuchen wie sich zwey begrenzte Flächen aus einander erzeugen (zu einander verhalten). Auch hier muß daher wieder erklärt werden, was man unter Addiren, Subtrahiren, Summen und Differenzen der Flächenfiguren, unter Summenden, Minuenden und Subtrahenden verstehe; desgleichen muß auch die Bezeichnung für diesen Fall auf's neue aufgestellt werden.

§. 34. Zwey Flächenfiguren (begrenzte Flächen) sind congruent, wenn sie nach gehörigem Aufeinanderlegen mit allen ihren Grenzen aufeinander fallen; sie sind gleich, wenn sie aus denselben congruenten Flächen durch Addition und Subtraction zusammengesetzt sind. Eine Flächenfigur ist größer als eine andere, wenn zu letzterer noch irgend eine dritte Flächenfigur addirt werden muß, um eine der erstern gleiche Fläche zu erzeugen. Von der andern sagt man dann auch: sie sey kleiner als die erstere.

Besteht eine Flächenfigur aus 2, 3, 4 oder mehr gleichen Summenden, so heißt jeder Summend die Hälfte, das Drittheil, Viertheil u. s. w. dieser Flächenfigur. Sie selbst heißt dann das doppelte, dreifache, vierfache u. s. w. eins der Summenden.

§. 35. Es folgern sogleich nachstehende Sätze:

1) Wenn zwey Flächenfiguren einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.
2) Wenn eine Figur größer ist, als eine von zwey gleichen Figuren, so ist sie auch größer wie die andere.
3) Wenn eine Figur größer ist als eine zweyte, diese wieder größer als die dritte, so ist auch die erste größer als die dritte.
4) Ein Theil einer Figur ist immer kleiner als die ganze.
5) Congruente Flächen sind immer auch gleiche; aber gleiche Flächen sind nicht immer congruent.

§. 36. Nun folgen die 7 Sätze von den Summen und Differenzen der Flächenfiguren, wie sie (§. 10.) von den Linien aufgestellt sind. Nur ergeben sich hier die Beweise nicht wie dort durch Aufeinanderlegen, sondern unmittelbar aus den Begriffen der Gleichheit und Ungleichheit der Flächenfiguren.

§. 37. Ferner kommen nun die 14 ersten Sätze (§. 12.) hier für Flächenfiguren abgeändert, übrigens wörtlich. Die Beweise folgen (wie dort) aus den vorhergehenden 7 Sätzen von den Summen und Differenzen.

§. 38. Endlich müssen auch die Sätze (§§. 13 — 15.) hier wörtlich wiederholt werden, immer Flächenfigur statt dort Linie gesetzt. Nur ist zu bemerken, daß die Sätze (§. 14. u. §. 15.) noch gelten, wenn auch das Verhältniß M: N kein

Verhältniß zwischen Flächen seyn sollte. — Ferner muß den Sätzen (§. 13*) noch vorausgeschickt werden: Congruente Flächen haben gleiche Maaße, wenn sie durch dasselbe Gemäß gemessen werden.

§. 39. Zwey Dreyecke sind congruent, wenn sie

I. eine Seite und zwey anliegende Winkel oder

II. eine Seite und zwey beliebige Winkel

III. zwey Seiten und den von diesen Seiten gebildeten Winkel oder

IV. alle 3 Seiten, oder endlich

V. zwey Seiten und einen gegenüberstehenden Winkel

gleich haben und im letztern Fall die Summe der beyden andern gegenüberstehenden Winkel größer oder kleiner als ein flacher Winkel ist.

Diese 5 Sätze werden erwiesen, indem man die Dreyecke auf einander legt, so daß ein Paar gleicher Seiten mit ihren Endpunkten auf einander fallen. Dann kommt es bloß darauf an, ob auch der dritte Winkelpunkt auf den dritten fällt. Dies sieht man in I. II. III. sogleich ein; in IV. und V. indirect; zu welchem Ende auch noch folgende Sätze dienen können:

§. 40. I. In jedem Dreieck stehen gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber.

II. In jedem Dreieck steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

III. Gleichen Winkeln stehen gleiche Seiten gegenüber (in einem Dreyeck). (Indirekt bewiesen.)

IV. Im Dreyeck steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber. (Wird indirekt bewiesen.)

V. Die Summe zweyer Seiten eines Dreyecks ist immer größer als die dritte, daher auch die Differenz zweyer Seiten kleiner als die dritte.

Der erstere dieser Sätze wird bewiesen indem man eine (oder mehrere) Hilfslinien zieht, dadurch Dreyecke bildet, in denen die beyden gleich seyn sollenden Winkel, der eine in dem einen Dreyeck, der andere in dem andern vorkommen, und deren Congruenz aus den Bedingungen verbunden mit denen unter welchen die Hilfslinien gezogen sind, abgeleitet werden kann.

Dieses Hilfsmittel, vermöge der Congruenz der Dreyecke die Gleichheit (daher auch die Ungleichheit) von Linien oder Winkel zu beweisen, ist besonders wichtig. Da nehmlich Dreyecke 3 Winkel und 3 Seiten, also 6 Stücke enthalten, aber im Durchschnitt nach §. 39. schon congruent sind, sobald nur 3 dieser 6 Stücke in beyden einander gleich sind, so folgt dann allemal aus der Congruenz, daß auch die übrigen 3 Stücke, nehmlich diejenigen welche bei dem Aufeinanderlegen mit ihren Grenzen auf einander fallen, einander gleich sind. Die Congruenz der Dreyecke erlaubt daher immer aus der Gleichheit von 3 Stücken eines Dreyecks auf die Gleichheit der übrigen 3 Stücke zu schließen.

Durch vorstehende 10 Hauptsätze kann man daher nachstehende und viele andere ähnliche Sätze unmittelbar erweisen, so daß sie bloß als Anwendungen zu betrachten sind, die hier eingeübt werden sollen.

§. 41. 1) Im gleichschenklichen Dreyeck sind die Winkel an der dritten Seite (Grundlinie) einander gleich; daher auch alle Winkel gegeben, so bald einer gegeben ist.

2) Im ungleichseitigen Dreyeck sind alle Winkel ungleich; und umgekehrt.

3) Im gleichseitigen Dreyeck sind alle Winkel einander gleich; und umgekehrt.

4) Im gleichschenklichen Dreyeck sind die

Winkel an der dritten Seite immer spitze Winkel.

5) Daher bildet der Radius mit einer durch seinen Endpunkt gezogenen Sehne immer einen spitzen Winkel.

6) Zieht man in einem Dreyeck aus irgend einer Winkelspitze (Spitze des Dreyecks) auf die entgegengesetzte Seite eine senkrechte Linie, so heißt diese die Höhe, die Seite des Dreyecks aber auf welcher die Höhe senkrecht steht, die Grundlinie des Dreyecks. — Die Höhe eines Dreyecks muß immer in die Fläche des spitzen Winkels fallen, der an der Grundlinie liegt.

7) Liegen daher an der Grundlinie zwey spitze Winkel, so fällt sie immer in die Fläche des Dreyecks, der dritte Winkel an der Spitze kann dabei ein spitzer oder rechter oder stumpfer Winkel seyn.

8) Liegt aber ein stumpfer Winkel an der Grundlinie, so fällt die Höhe immer in die Fläche des spitzen Nebenwinkels, also ausserhalb des Dreyecks.

9) Im rechtwinklichen Dreyeck ist die Hypothenuse (Seite die dem rechten Winkel gegenüber liegt) größer als jede der Katheten (Seiten die den rechten Winkel einschließen).

10) Im stumpfwinklichen Dreyeck ist die Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, die größeste.

10*) Wenn eine Seite im Dreyeck nicht die größeste ist, so ist ihr gegenüberliegender Winkel nothwendig ein spitzer.

10**) Daher sind zwey Dreyecke congruent, wenn zwey Seiten gleich sind und der Winkel, welcher der größten Seite gegenübersteht.

11) Im Kreise ist der Centriwinkel (Winkel am Mittelpunkt) immer doppelt so groß, als der Peripheriewinkel (Winkel dessen Spitze in der Kreislinie, Peripherie, liegt) wenn beyde auf einerlei Bogen stehen, d. h. wenn die Schenkel von beyden durch die Endpunkte eines und desselben Bogens gehen.

12) Alle Peripheriewinkel die auf einerlei Bogen stehen, sind einander gleich.

13) Winkelspitzen gleicher Winkel die auf einer Grundlinie stehen, liegen alle in einerlei Kreislinie.

14) Jeder Peripheriewinkel, der auf dem Halbkreis steht, ist ein rechter Winkel.

15) Daher der Durchmesser größer als jede Sehne.

16) In einem Viereck dessen Ecken alle in einer Kreislinie liegen, ist die Summe zweyer gegenüberstehender Winkel immer einem flachen Winkel gleich.

17) Jede Linie die in dem Endpunkt des Radius senkrecht auf selbigem steht, ist eine Tangente (d. h. eine Linie, welche die Kreislinie nur in einem Punkte trifft, deren übrigen Punkte alle bis in's Unendliche ausserhalb der Kreislinie liegen).

18) Jede Linie die mit dem Radius in dessen Endpunkte einen schiefen (stumpfen oder spitzen) Winkel macht, schneidet die Kreislinie.

19) Die Tangente steht immer senkrecht auf dem durch den Berührungspunkt gezogenen Radius.

20) Jede Linie, welche in dem Berührungspunkt einer Tangente senkrecht auf sie gezogen wird, geht durch den Mittelpunkt der Kreislinie. (Beyde letztere werden indirekt bewiesen.)

21) Der Winkel, den eine Sehne mit einer durch ihren Endpunkt gezogenen Tangente macht, ist immer jedem Peripheriewinkel gleich, der auf dem von der Sehne abgeschnittenen Bogen steht. — Dies gilt von beyden Bogen, die immer zu einer Sehne gehören.

22) Der Halbmesser der senkrecht auf eine Sehne gezogen wird, halbirt die Sehne, den Bogen, und den zugehörigen Centriwinkel.

23) Der Halbmesser, der durch den Halbirungspunkt der Sehne geht, steht senkrecht auf der Sehne, und halbirt den Bogen und den Centriwinkel.

24) Die Linie welche in dem Halbirungs-Punkt der Sehne senkrecht auf ihr steht, geht durch den Mittelpunkt der Kreislinie.

25) Wenn in einem Dreyeck zwey Seiten halbirt und durch die Halbirungs-Punkte senkrechte Linien gezogen werden, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden senkrechten der Mittelpunkt einer Kreislinie, welche durch die 3 Ecken des Dreyecks hindurchgeht. Eine solche Kreislinie ist daher allemal möglich.

26) Halbirt man die dritte Seite und errichtet eine ähnliche senkrechte Linie, so muß diese durch denselben Mittelpunkt hindurchgehen.

27) Wenn in einem Viereck die zwey gegenüberstehenden Winkel einen flachen Winkel ausmachen, so ist allemal eine Kreislinie möglich, die durch alle 4 Ecken hindurch geht. (Wird indirekt erwiesen.)

28) Im Parallelogramm (Viereck welches zwey Paar paralleler Seiten hat) sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel einander gleich.

29) Sind in einem Viereck je zwey gegenüberliegende Seiten einander gleich, so sind sie auch parallel, und es sind auch die gegenüberstehenden Winkel einander gleich.

30) Sind in einem Viereck zwey Seiten einander gleich und parallel, so sind auch die beyden andern gleich und parallel.

31) In jedem Parallelogramm ist die Summe zweyer an einer Seite liegenden Winkel einem flachen Winkel gleich.

32) Im Trapez (Viereck mit nur 2 parallelen — ungleichen — Seiten) ist die Summe der an der kleinern Parallele liegenden Winkel größer, die Summe der beyden andern Winkel aber kleiner als ein flacher Winkel. Auch schneiden sich die beyden andern Seiten, genugsam verlängert, nach der kleinern Parallele zu.

33) In jedem Viereck dessen 4 Seiten eine Kreislinie berühren (Tangenten der Kreislinie sind) sind die Summen je zweyer gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

34) Alle senkrechten Linien die man aus Punkten einer Linie auf eine andere mit dieser parallelen Linie herabfällt, sind einander gleich.

35) Die kürzeste von allen Linien, die von einem Punkte aus auf eine Linie gezogen werden können, ist die senkrechte. — Sie heißt daher die Entfernung des Punktes von der Linie.

36) Parallele Linien sind allenthalben gleich weit entfernt.

37) Die Entfernung zweyer paralleler Seiten im Parallelogramm heißt die Höhe des Parallelogramms; diese Seiten selbst sind die Grundlinien. — Zu denselben Grund-

linien sind die Höhen allenthalben einander gleich.

38) Parallelogramme, die einen rechten Winkel haben, haben lauter rechte Winkel. Solche nennt man Rechtecke.

39) Rechtecke mit zwey anstoßenden gleichen Seiten haben lauter gleiche Seiten. Solche nennt man Quadrate.

40) Parallelogramme mit einem schiefen Winkel haben lauter schiefe Winkel. Solche heißen Rhomboiden. Sind zwey zusammenstoßende Seiten einander gleich, so sind sie alle einander gleich. Solche Parallelogramme heißen dann Rauten (Rhomben).

41) Parallelogramme werden durch jede der beyden Diagonalen (Linien, die durch 2 Eckpunkte eines Vielecks gezogen sind, ohne Seiten des Vielecks zu seyn) in zwey congruente Dreiecke getheilt.

42) Wenn ein Winkel halbirt wird, so ist jeder Punkt der Halbirungslinie von den Schenkeln gleich entfernt.

43) Jeder solche Punkt ist daher Mittelpunkt einer Kreislinie, welche die beyden Schenkel des Winkels berührt.

44) Halbirt man also im Dreyeck 2 Winkel, so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der beyden Halbirungslinien von allen 3 Seiten des Dreiecks gleich entfernt; ist daher als Mittelpunkt einer Kreislinie anzusehen, welche die 3 Seiten des Dreiecks berührt.

45) Der Punkt welcher von 3 Seiten eines regulären Vielecks (Vieleck, welches lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat) gleich entfernt ist, ist auch von allen Seiten gleich entfernt; ist daher als Mittel-

punkt einer Kreislinie anzusehen, welche alle Seiten berührt.

46) Die Kreislinie, welche durch 3 Ecken eines regulären Vielecks hindurchgeht, geht auch durch alle übrigen hindurch.

47) Der Mittelpunkt der Kreislinie, welche alle Seiten des regulären Vielecks berührt, ist auch zugleich Mittelpunkt der Kreislinie, die durch alle Ecken des Vielecks hindurchgeht.

48) Jedes reguläre Vieleck wird durch Linien, die von diesem Mittelpunkte aus nach den Ecken desselben gezogen werden, in so viele congruente gleichschenkliche Dreiecke zerlegt als es Seiten hat; der zu einem dieser Dreiecke gehörige Centriwinkel ist immer der sovielte Theil von 2 flachen Winkeln als das Vieleck Seiten hat. Der Vielecks-Winkel aber (Winkel, den zwey Seiten des Vielecks bilden) ist allemal der Differenz eines flachen und dieses Centriwinkels gleich.

49) Im regulären Sechseck ist der Centriwinkel der sechste Theil von 2 flachen, oder der dritte Theil von einem flachen Winkel. Demnach ist die Seite eines regulären Sechsecks allemal dem Halbmesser der Kreislinie gleich, die durch alle 6 Ecken hindurchgeht.

50) Wenn sich zwey Kreislinien innerhalb oder ausserhalb berühren, so liegen die beyden Mittelpunkte und der Berührungspunkt in einer geraden Linie.

51) Durchschneiden sich zwey Kreislinien, so geht die durch die beyden Mittelpunkte gezogene Linie auch durch den Halbirungspunkt der gemeinschaftlichen Sehne und steht senkrecht auf dieser.

Fig. 8. 52) Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc $CB = cb$, $AC = ac$ und $B + b = \pi$ ist, so ist auch $A = a$.

53) Wenn $BC = bc$, $A = a$ und $B + b = \pi$ ist, so ist auch $AC = ac$.

54) Wenn $AC = ac$, $A = a$ und $B + b = \pi$ ist, so ist auch $AB = ab$.

Anmerk. Man kann auch die Fälle in Betrachtung ziehen, in welchen zwey Stücke eines Dreyecks als gleich, ein drittes aber als verschieden gegeben ist, und wo aus diesen Angaben auf die 3 übrigen Stücke geschlossen werden soll. Man erhält dann folgende Sätze:

Fig. 8. 1) Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc $A = a$, $B = b$ und $AB > ab$ ist, so ist auch $C = c$ $AC > ac$ und $BC > bc$.

2) Wenn $A = a$, $C = c$, und $AB > ab$, so ist auch $AC > ac$, $BC > bc$, $B = b$.

3) Wenn $AB = ab$, $B = b$ und $A < a$ ist, so ist auch $C < c$, $BC > bc$ und $AC \gtrless ac$ je nachdem $C + c \lessgtr \pi$ ist.

4) Wenn $AB = ab$, $B = b$ und $C < c$ ist, so ist auch $A > a$, $BC > bc$ und $AC \gtrless ac$, je nachdem $C + c \lessgtr \pi$.

5) Wenn $AB = ab$, $B = b$, $BC > bc$ ist, so muß auch $A > a$, $C < c$ und $AC \gtrless ac$ seyn, je nachdem $C + c \lessgtr \pi$.

6) Ist $AB = ab$, $B = b$, $AC > ac$, so muß auch seyn $A \gtrless a$, $C \gtrless c$, $BC \gtrless bc$, je nachdem $C + c \lessgtr \pi$ ist.

7) Wenn $AB > ab$, $C = c$, $A > a$ ist, so ist auch $B < b$, $AC \gtrless ac$ wenn $B + b \gtrless \pi$, und es ist auch $BC \gtrless bc$, wenn $A + a \lessgtr \pi$ ist.

8) Wenn $AB = ab$, $C = c$, $AC > ac$ ist, so ist auch $A \gtrless a$, $B \lessgtr b$, wenn $B + b \gtrless \pi$ und es ist dabey $B > bc$ wenn $B + b > \pi$ oder $A + a > \pi$ dagegen $BC < bc$ wenn $B + b < \pi$ und $A + a < \pi$.

9) Wenn $AB = ab$, $AC = ac$ $A > a$, so ist auch $BC > bc$, $B \gtreqless b$ wenn $C + c \gtreqless \pi$, und $C \gtreqless c$ wenn $B + b \gtreqless \pi$ ist.

10) Wenn $AB = ab$, $AC = ac$, $BC > bc$, so ist $A > a$, $B \gtreqless b$ wenn $C + c \gtreqless \pi$, und $C \gtreqless c$ wenn $B + b \gtreqless \pi$.

11) Wenn $AB = ab$, $AC = ac$, $B > b$, so ist auch $BC \gtreqless bc$, $A \gtreqless a$ wenn $C + c \gtreqless \pi$; und $C > c$ wenn $C + c < \pi$ und $B + b < \pi$; dagegen $C < c$ wenn $C + c > \pi$ oder $B + b > \pi$.

12) Wenn $CB = cb$, $AC > ac$, $B + b = \pi$ ist, so ist auch $A < a$.

13) Wenn $CB = cb$, $A < a$, $B + b = \pi$ ist, so ist auch $AC > ac$.

14) Wenn $AC = ac$ $A > a$, $B + b = \pi$ ist, so muß auch $BC > bc$ seyn.

15) Wenn $AC = ac$, $BC > bc$, $B + b = \pi$ ist, so ist auch $A > a$.

16) Wenn $A = a$, $AC > ac$, $B + b = \pi$ ist, so ist auch $BC > bc$.

17) Wenn $A = a$, $BC > bc$, $B + b = \pi$ so ist auch $AC > ac$.

Die Folgerungen, die man aus diesen Sätzen ziehen kann, sind in großer Menge vorhanden. Unter allen mögen nur folgende hier stehen:

1) Gleiche Sehnen sind gleich weit vom Mittelpunkt entfernt, aber die größere Sehne liegt dem Mittelpunkte näher, die kleinere ist weiter entfernt.

2) Sehnen die gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, sind gleich; die näher liegt, ist größer, die entferntere aber kleiner u. d. gl. m.

§. 42. Nach der Congruenz der Flächen kommen nun folgende 3 Sätze der Gleichheit der Flächenfiguren.

I. Parallelogramme sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

II. Dreyecke sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

III. Ein Dreyeck ist die Hälfte von einem Parallelogramm, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Der erste Satz wird bewiesen durch Aufeinanderlegen mittelst der Congruenz der Dreyecke. Der zweyte, indem man die Dreyecke zu Parallelogrammen ergänzt.

§. 43. Aus diesen 3 Sätzen gehen wieder unmittelbar folgende hervor:

1) Zwey Parallelogramme und zwey Dreyecke sind einander gleich, wenn sie auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie stehen und zwischen denselben Parallelen liegen.

2) Ein Dreyeck ist die Hälfte von einem Parallelogramm, das mit ihm auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie und zwischen denselben Parallelen liegt.

Fig. 11. 3) Das Quadrat auf der Kathete AB des rechtwinklichen Dreyecks ABC ist dem Rechteck gleich, das auf dem Stück AD der Hypothenuse als Grundlinie errichtet wird und dessen Höhe die Hypothenuse selbst ist.

4) Daher ist auch das Quadrat der Hypothenuse so groß als die Summe der Quadrate die auf beyden Katheten errichtet werden.

4*) Ist in einem Dreyeck das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten, so ist das Dreyeck rechtwinklich.

5) Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, welches die Grundlinie des Parallelogramms zur einen Seite, zur andern Seite aber die Höhe des Parallelogramms hat.

6) Jedes Dreyeck ist einem rechtwinklichen Dreyecke gleich, welches zur einen Kathete die

Grundlinie, zur andern aber die Höhe des ersten Dreyecks hat.

7) Daher ist auch jedes Dreyeck einem zweyten Dreyecke gleich, welches die Höhe des erstern zur Grundlinie, die Grundlinie des erstern aber zur Höhe hat. Dasselbe gilt von einem Parallelogramm.

8) Jedes Parallelogramm ist einem Dreyecke gleich, welches dieselbe Grundlinie, aber die doppelte Höhe, oder dieselbe Höhe, aber die doppelte Grundlinie hat.

9) Jedes Trapez ist einem Dreyecke gleich, welches dieselbe Höhe hat mit dem Trapez, aber die Summe der beyden (parallelen) Grundlinien des Trapez zur Grundlinie.

10) Jedes Viereck ist einem Dreyecke gleich, welches eine Diagonale zur Grundlinie, die Summe der beyden senkrechten Linien, die von den andern Ecken auf die Diagonale gezogen werden können, aber zur Höhe hat.

11) Jedes reguläre Vieleck ist einem Dreyecke gleich, welches den Umfang des Vielecks (Summe aller Seiten) zur Grundlinie, den Abstand des Mittelpunkts von einer der Vielecks Seiten aber zur Höhe hat.

12) In so fern wir uns den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten denken müssen, wenn wir die Kreislinie mit der geraden Linie vergleichen wollen, ist der Kreis (die Kreisfläche) einem Dreyecke gleich, welches die ganze Kreislinie zur Grundlinie, den Radius aber zur Höhe hat.

13) Folglich ist auch ein Sektor (ein von zwey Radien begrenzter Theil der Kreisfläche) einem Dreyecke gleich, welches den Bogen zur Grundlinie, den Halbmesser aber zur Höhe hat.

4) Es ist immer das Parallelogramm FEGH gleich dem Parallelogramm BCDE.

Von den Verhältnissen und Proportionen der Winkel und der völlig begrenzten Flächen, so wie auch der Linien in selbigen. Ohne Zuziehung der Zahlenlehre.

§. 44. Nach (§. 38.) weiß man, daß wenn A und B zwey Linien, zwey Winkel oder zwey begränzte Flächen sind, wenn ferner auch C und D zwey gleichartige dieser Raumgrößen bezeichnen und dabei gegeben ist

A: B = C: D

dann auch seyn müsse

1) B: A = D: C
2) $A \pm B$: B = $C \pm D$: D
3) $B \pm A$: A = $D \pm C$: C;
4) B: $A \pm B$ = D: $C \pm D$
5) A: $B \pm A$ = C: $D \pm C$.

Diese Proportionen finden statt, auch wenn A und C, desgleichen B und D keine gleichartigen Raumgrößen sind. Sind aber alle vier Raumgrößen gleichartig, so ist dann allemal auch noch

6) A: C = B: D

Dieser Satz kann allgemein auf folgende Art erwiesen werden:

1) Es ist allemal m. A: A = m B: B
2) Auch mA: mB = A: B

Das erstere erhellet unmittelbar aus dem Begriff von Verhältniß und Proportion. Das andere aus dem Satz: daß das mfache einer Raumgröße so vielmal in dem mfachen einer andern enthalten ist, als die erstere Raumgröße selbst in der andern; ein Satz der sich unmittelbar aus den (§§. 10. 23. 36.) aufgestellten Sä-

hen der Summen und Differenzen ableiten läßt. Ist nun A: B = C: D so heißt das nichts anders als: eine gleichartige Größe X ist in A und in B gerade so viel mal enthalten, als eine andere gleichartige Größe Y in C und in D steckt. Ist also A = m X, B = n X, so ist C = m Y, D = n Y. Aber nach No. 2. ist: m X: m Y = X: Y, desgleichen n X: n Y = X: Y folglich m X: m Y = n X: n Y d. h. A: C = B: D. W. Z. E. W.

§. 45. Hieraus folgt ferner, daß wenn A, B, C, D, E, F, G, H etc. lauter gleichartige Raumgrößen sind, und dabey

A: B = C: D = E: F = G: H = etc.

dann auch seyn müsse:

A + C + E + G etc: B + D + F + H + etc. =
= A: B = C: D = E: F = G: H = etc.

Fig. 10. §. 46. I. Wenn in einem Dreyeck ABC eine beliebige Linie DE mit AC parallel gezogen wird, so ist allemal

AB: DB = CB: EB

II. Wenn in einem Dreyeck ABC eine Linie DE so gezogen wird, daß AB: DB = CB: EB ist, so läuft diese Linie DE mit der AC parallel.

III. Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc die Winkel gleich sind A = a, B = b (also auch C = c), so sind alle Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberstehen proportionirt, d. h. es ist

AB: ab = BC: bc = AC: ac

IV. Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc ein Winkel B = b ist und dabey die beyden Seiten, die diesen Winkel einschließen, proportionirt sind, d. h. wenn noch AB: ab = BC: bc ist, so sind alle übrigen Winkel gleich und alle übrigen Seiten proportionirt; d. h. es ist dann auch: A = a, C = c und AB: ab = AC: ac, auch BC: bc = AC: ac.

V. Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc alle Seiten proportionirt sind, so sind auch alle Winkel gleich und zwar paarweise diejenigen, welche proportionirten Seiten gegenüberstehen, d. h. ist gegeben AB: ab = BC: bc = AC: ac, so ist auch A = a, B = b, C = c.

Beweise.

I. muß für 2 Fälle geführt werden 1) wenn DB in AB ohne Rest enthalten, 2) wenn dies nicht der Fall ist. Im erstern Fall trägt man die DB so oft es angeht ab, zieht Parallelen mit AC, so wie auch durch die Punkte, wo solche die BC treffen, Parallelen mit AB, erhält congruente Dreyecke, aus denen dann hervorgeht, daß BE in BC eben so vielmal enthalten ist, als DB in AB. W. Z. E. W. — Im zweyten Falle giebt es eine Linie BX, welche in AB und in DB ohne Rest enthalten ist. Zieht man XY parallel mit AC, so ist BY (nach dem ersten Fall) in BC und BE eben so vielmal enthalten. W. Z. E. W.

II. wird indirekt bewiesen, daß D = X seyn muß, wenn A = P, B = Q und C = V und dabey A: B = C: D und P: Q = V: X ist. (§. 15. No. 6. 7.)

III und IV erhellen, wenn man das Dreyeck abc in ABC trägt.

V. endlich wird bewiesen, indem man die BD der ab gleich macht, durch D eine Parallele zieht mit AC und nun aus den Bedingungen ableitet, daß das Dreyeck BDE mit abc congruent ist.

Anmerk. 1. Solche Dreyecke, welche gleiche Winkel haben und in denen also die gegenüberstehenden Seiten proportionirt sind, nennt man gewöhnlich ähnliche Dreyecke, und zwey Seiten in diesen Dreyecken, welche gleichen Winkeln gegenüber-

stehen heißen ähnlich liegende oder homologe Seiten.

Anmerk. 2. Nimmt man Verhältniß in dem Sinne (Anmerk. §. 13.) so kann man die Gleichheit der beyden Verhältnisse AB: ab und BC: bc in Satz III. auch auf folgende Art nachweisen: Man trägt nehmlich ab auf AB ab, so vielmal es angeht, z. B. bis G, zieht GH parallel mit AC, so ist auch bc in BC eben so vielmal enthalten, wie ab in AB und es bleibt der Rest HG (dies wird wie der erste Fall in I. bewiesen). Zieht man nun GK=HC parallel mit BC, so haben wir ein neues Dreyeck AGK, welches mit abc wieder gleiche Winkel hat und von dem man also auf dieselbe Art wieder nachweisen kann, daß AG in ab sich eben so vielmal abtragen läßt als GK oder HC in bc; und so kann man fortfahren und ganz auf dieselbe Art nachweisen, daß sich der dortige Rest von ab auf dem Rest AG wieder eben so vielmal abtragen läßt, als der Rest von bc sich auf dem Rest HC (GK) abtragen lassen wird, u. s. w. W. Z. E. W. — In so fern die übrigen 4 Sätze aus diesem Einen sich ableiten lassen, sind daher auch diese bewiesen, indem man Verhältniß in dem Sinne der (Anmerk. §. 13.) nimmt.

§. 47. Hat man diese 5 Hauptsätze gut begriffen, so ist man durch sie in den Stand gesetzt, alle nachstehende Sätze unmittelbar einsehen zu können, in sofern es meist darauf ankommt Dreyecke zu construiren, bey denen einer der gedachten 5 Sätze angewandt werden kann. Diese Sätze sind:

Fig. 11. 1) Wenn in einem bey B rechtwinklichen Dreyeck die Linie BD auf die Hypothenuse senkrecht herabgezogen wird, so entstehen 3 ähnliche rechtwinkliche Dreyecke, welche 9 Proportionen zwischen ihren Seiten geben. Die merkwürdigsten darunter sind

1) AD: BD=BD: DC.
2) AD: AB=AB: AC.
3) CD: CB=CB: CA.

Fig. 12. 2) Wenn in einem Halbkreise aus irgend

einem Punkt B eine senkrechte Linie BD auf den Durchmesser AC gezogen wird, so entstehen, nachdem man die Sehnen BA und BC gezogen hat, dieselben 9 Proportionen.

Fig. 13 u. 14. 3) Wenn in einem Kreise zwey Sehnen AB und CD gezogen werden, die sich entweder innerhalb oder außerhalb der Kreislinie in dem Punkte E schneiden, so ist allemal:

AE: CE = DE: BE.

Anmerk. Daß die Stücke nicht symmetrisch genommen werden dürfen, drückt man gewöhnlich dadurch aus, daß man sagt: die Stücke der Sehnen vom Durchschnittspunkt E zu ihren Endpunkten A, B, C, D, wären umgekehrt proportionirt. — Desgleichen nennt man gewöhnlich solche Proportionen, wie die in (No 1.), deren beyde mittlere Glieder einander gleich sind, stetige Proportionen. Bey solchen ist auch öfter nur von drei Gliedern die Rede.

Fig. 15. 4) Zieht man die Tangente AB und die schneidende Linie ADE, so ist allemal:

AD: AB = AB: AE.

Fig. 16. 5) Ist der Winkel ACB in CD halbirt, so ist auch allemal

AC: CB = AD: DB.

6) Umgekehrt: ist CD so gezogen, daß man hat: AC: CB = AD: DB, so ist der Winkel ACB in CD halbirt.

7) Haben zwey Dreyecke an den Grundlinien einen gleichen Winkel, so sind die Höhen mit den diesem Winkel anliegenden Seiten proportionirt.

8) Daher sind in ähnlichen Dreyecken die Höhen mit allen Seiten, folglich auch mit den Grundlinien proportionirt.

9) Wenn zwey Vielecke nach der Ordnung gleiche Winkel haben und je 4 Seiten, die 2 gleiche Winkel einschließen, proportionirt sind, so sind die Dreyecke nach der Ordnung ähnlich, die

entstehen, indem man aus den gleichen Winkel-spitzen Diagonallinien zieht.

10) Umgekehrt: sind diese Dreyecke ähnlich, so haben auch die Vielecke gleiche Winkel und je 4 Seiten, die gleiche Winkel einschließen, sind proportionirt. — Solche Vielecke nennt man ähnliche Vielecke.

11) Alle regulären Vielecke, die gleichviel Seiten haben, sind ähnlich.

12) Alle Kreise sind ähnlich.

13) Alle Kreissektoren, die zu einerlei Centriwinkel gehören, sind ähnlich.

14) In ähnlichen Vielecken verhalten sich die Summen von gleichviel homologen Seiten, wie ein Paar dieser homologen Seiten.

15) Daher verhalten sich Kreisbögen gleicher Centriwinkel, wie ihre Halbmesser.

16) Daher auch ganze Kreislinien, wie ihre Halbmesser und auch wie ihre Durchmesser u. d. gl. m.

§. 48. Was die Flächen der Dreyecke ꝛc. betrifft, so hat man:

I. Rechtecke verhalten sich bey gleichen Grundlinien wie ihre Höhen.

II. Rechtecke verhalten sich bey gleichen Höhen wie ihre Grundlinien.

Der Beweis wird wie der von (§. 46. I.) geführt.

§. 49. Unmittelbar aus diesen Sätzen ergeben sich nun wieder:

1) Parallelogramme verhalten sich bey gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien und bey gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen.

2) Dreyecke verhalten sich bey gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien und bey gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen.

3) Sind 2 Rechtecke ABCD und BEFG ein=

ander gleich, so verhalten sich die Seiten derselben umgekehrt zu einander.

Fig. 17. 4) Sind 4 Linien in Proportion, so ist das Rechteck aus den beyden äusseren Gliedern gleich dem Rechteck der beyden mittleren Glieder.

Fig. 13 u. 14. 5) Im Kreise ist daher das Rechteck aus den beyden Theilen AE, BE der einen Sehne gleich dem Rechtecke aus den beyden Theilen der andern Sehne CE und DC.

Fig. 15. 6) Eben so ist das Rechteck aus den beyden Theilen der Sehne AD und AE gleich dem Quadrat der Tangente AB.

Fig. 12. 7) Auch ist im Halbkreise das Quadrat von BD gleich dem Rechteck aus den beyden Theilen des Durchmessers.

Fig. 12. 8) Desgleichen ist das Quadrat jeder Sehne gleich dem Rechteck aus dem ganzen Durchmesser und dem von BD abgeschnittenen Stück desselben, welches der fraglichen Sehne anliegt.

Anmerk. Das Rechteck, das aus 2 Seiten M und N construirt ist, bezeichne ich immer durch M. N oder auch durch M × N. Das über der Seite M construirte Quadrat aber durch Mq. Der letzte Satz No. 8. läßt sich also so niederschreiben ABq = AD, AC und BCq = CD × AC. Da die Schüler alle Sätze (also auch die in diesem Paragraphen), die oft hier nur angedeutet sind, gehörig sprachrichtig zergliedern und auseinandersetzen, folglich auch die Proportionen und die vorkommenden Gleichheiten alle an einer eigens dazu construirten Figur aufsuchen und niederschreiben müssen, so ist die Bezeichnung hier zu wissen nöthig.

9) Aehnliche Dreyecke verhalten sich zu einander wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Beweis.

Fig. 18. Es ist AB : ab = BG : bg = BE : be = GE : ge folglich auch BAFG : abfg =

FGDE: fgde, dahero ABDE: abde = ABFG: abfg = ABC: abc mithin ABC: abc = ABq: abq

10) Alle Paare ähnlicher Dreyecke, in welche ähnliche Vielecke zerlegt werden können, haben zu einander und mit den Quadraten ähnlich liegender Seiten gleiche Verhältnisse.

11) Daher verhalten sich auch die Summen von gleich viel solchen Dreyecken, also auch die ganzen Vielecke, wie ein Paar solcher Dreyecke oder wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

12) Demnach auch zwey Kreissektoren, die gleiche Centriwinkel haben, wie die Quadrate der Halbmesser.

13) Folglich auch ganze Kreise, wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

14) Sind 4 Linien in Proportion z. B. a: b = c: d so sind auch ihre Quadrate in Proportion, d. h. es ist auch aq: bq = cq: dq.

Beweis.

Denn es ist aq: a. b = a: b = c: d = cq: cd aus demselben Grunde auch bq: ab = dq: c. d folglich aq: cq = ab: c. d = bq: dq mithin auch aq: bq = cq: dq. W. Z. E. W. *)

15) Daher verhalten sich auch ähnliche Kreissektoren und ähnliche Kreise nicht bloß wie die Quadrate ihrer Halbmesser, sondern auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

16) Sind 4 Quadrate proportionirt, so sind es auch ihre Seiten.

---

*) Es versteht sich aus dem vorhergesagten von selbst, daß die Schüler auch diesen Satz mit Zuziehung der gehörigen Figuren beweisen müssen.

17) Sind von 8 Linien je 4 proportionirt, so sind die Rechtecke aus den gleichnamigen Gliedern auch proportionirt, d. h. hat man

a : b = c : d

p : q = m : n so ist auch

ap : b. q = c. m : d. n

Beweis.

Es ist a. p : b. p = a : b = c : d = c. m : d. m. eben so b. p : b. q = p : q = m : n = dm : dn folglich a. p : c. m = b. p : d. m und

b. q : d. n = b. p : d. m folglich

a. p : c. m = b. q : d. n also auch

a. p : b. q = c. m : d. n. W. Z. E. W.

18) Sind 4 Rechtecke und die 4 Höhen proportionirt, so sind es auch die 4 Grundlinien; und sind ausser den Rechtecken auch ihre Grundlinien proportionirt, so sind es auch ihre Höhen.

18*) Ist b = p so ist a. p : b. q = a : q folglich dann auch a : q = c. m : d. n.

18**) Diese letzte Proportion läßt sich auch erweisen im Falle a, b, p, q Flächen c, d, m, n aber Linien sind, und b = p angenommen wird. — (Wird ohngefähr wie No. 17 erwiesen.)

19) Parallelogramme (und Dreyecke) die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Rechtecke aus den Seiten, die die gleichen Winkel einschließen.

Beweis.

Fig. 19. Es ist ABCD = ABGH und BIKL = BIOP. Nun ist ABFE : ABHG = BF : BH = BC : BH = BK : BO = BN : BO = BINM : BIOP, folglich ꝛc. ꝛc.

20) Sind Parallelogramme (oder Dreyecke) die einen gleichen Winkel haben einander gleich, so

sind die Seiten, die diesen gleichen Winkel einschließen, umgekehrt proportionirt.

21) Sind 4 Linien proportionirt, so sind die Parallelogramme (oder auch die Dreyecke) gleich, welche die äussern und die mittlern Glieder zu Seiten haben, die gleiche Winkel einschließen.

22) Construirt man auf den 3 Seiten eines rechtwinklichen Dreyecks ähnliche Figuren, so ist die auf der Hypothenuse beschriebene gleich der Summe der beyden auf den Katheten beschriebenen Figuren.

23) Daher auch der Halbkreis ABC gleich der Summe der beyden Halbkreise AEB und BFC.

Fig. 27. 24) Folglich auch das Dreyeck ABC gleich der Summe der beyden Monde (des Hippokrates) AEB und BFC.

§. 50. Nachdem auf diese Art die Planimetrie als beendigt betrachtet werden kann, mögen noch zur Anwendung der bisher vorgetragenen Lehren folgende Aufgaben stehen, in denen die Construktion von Linien und Winkeln und Flächenfiguren verlangt wird unter der Voraussetzung, daß man gerade Linien und Kreislinien zu ziehen, zu verlängern, auch gerade Linien abzutragen im Stande sey.

1) In einer Kreislinie einen Bogen abzuschneiden, der einem andern gleich ist.

2) An einem Punkt einer Linie einen Winkel abzutragen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

3) Von einem Punkt in einer Linie eine senkrechte zu errichten auf diese Linie.

4) Dieselbe Aufgabe, im Falle der Punkt ein Endpunkt wäre, und die Linie darüber hinaus nicht verlängert werden könnte.

5) Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

6) Eine gegebene Linie zu halbiren.

7) Von einem Punkt ausserhalb einer Linie auf diese Linie eine senkrechte Linie herabzufällen.

8) Einen Kreisbogen zu halbiren.
9) Durch einen Punkt mit einer Linie eine Parallele zu ziehen.
10) Aus 3 Linien,
11) aus 2 Linien und einem Winkel, der von diesen Linien eingeschlossen werden soll,
12) aus 2 Linien und einem Winkel, welcher einer der Linien gegenüberstehen soll im Falle man weiß, daß der andere gegenüberstehende Winkel ein stumpfer oder ein spitzer Winkel ist,
13) aus einer Seite und 2 Winkeln, die an dieser Seite anliegen sollen, endlich
14) aus 1 Seite und 2 Winkeln, von welchen der eine nur an der Seite anliegen soll, ein Dreyeck zu construiren.
15) Zwey gegebene Winkel zu addiren.
16) Einen Winkel von einem andern zu subtrahiren — Einen Winkel von einem flachen Winkel zu subtrahiren.
17) Aus zwey Winkeln eines Dreyecks den dritten zu finden.
18) Es ist der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreyecks gegeben, man soll den Winkel an der Spitze finden.
19) Aus dem Winkel an der Spitze die beyden gleichen Winkel an der Grundlinie zu finden.
20) Durch einen gegebenen Punkt ausserhalb einer Linie eine Linie zu ziehen, die mit der erstern einen gegebenen Winkel macht.
21) An einen Punkt einer Kreislinie eine Tangente zu ziehen.
22) Von einem Punkt ausserhalb der Kreislinie eine Tangente zu ziehen.
23) Eine Tangente zu ziehen, welche zwey ausserhalb einander in derselben Ebene liegende Kreislinien zugleich berührt.
24) Auf eine Linie ein Quadrat zu construiren.

25) Aus 2 Linien ein Rechteck zu construiren.
26) Aus 2 Linien und einem Winkel ein Parallelogramm zu construiren.
27) Ein Parallelogramm zu construiren mit einem gegebenen Winkel und daß es einem andern gegebenen Parallelogramm gleich sey.
28) Ein Parallelogramm zu construiren, welches einem andern gegebenen Parallelogramm gleich ist, aber einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat.
29) Von zwey gegebenen Punkten nach einem Punkte in einer Linie zwey Linien so zu ziehen, daß die Winkel gleich sind, welche diese mit der gegebenen Linie bilden.
30) Durch einen Punkt in der Fläche eines Winkels eine Linie so zu ziehen, daß sie, die von beyden Schenkeln des Winkels begrenzt wird, in dem gegebenen Punkte halbirt sey.
31) Ein Dreyeck zu construiren auf eine gegebene Linie, welches einem gegebenen Dreyeck ähnlich ist.
32) Ein Vieleck zu construiren auf eine gegebene Linie, welches einem andern gegebenen Vieleck ähnlich ist.
33) Zu 3 Linien die 4te Proportionallinie zu finden.
34) Zu 2 Linien die 3te Proportionallinie zu finden.
35) Zu 2 Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.
36) Ein Quadrat zu finden, welches einem gegebenen Rechtecke gleich ist.
37) Eine Linie in 2, 3 und mehr gleiche Theile zu theilen.
38) Eine Linie in solchem Verhältniß zu theilen, wie eine andere Linie schon getheilt ist.
39) Ein Dreyeck in 2, 3 und mehr gleiche Theile zu theilen.
40) Ein gleichschenkliches Dreyeck zu finden, welches einem gegebenen Dreyecke gleich ist.

41) Ein gleichseitiges Dreyeck zu finden, welches einem gegebenen Dreyecke gleich ist.

42) Eine Figur zu finden, die der Summe zweyer ähnlichen Figuren gleich, und diesen selbst ähnlich ist.

43) Einen Kreis zu finden, welcher der Summe zweyer gegebenen Kreise gleich ist.

44) Einen Kreis zu finden, welcher der Differenz zweyer gegebenen Kreise gleich ist.

45) Ein Quadrat zu finden, welches der Differenz zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

46) Man soll durch einen Punkt in der Fläche eines Winkels eine Linie so ziehen, daß die beyden Theile bis zu den Schenkeln ein gegebenes Verhältniß haben.

47) Daher auch so ziehen, daß der eine Theil das doppelte, 3fache, 4fache u. s. w. des andern ist.

48) Um und in ein Dreyeck eine Kreislinie zu ziehen.

49) Um und in ein reguläres Vieleck eine Kreislinie zu ziehen.

50) Ein Vieleck zu construiren aus 5 Stücken desselben, worunter sich höchstens 3 Winkel befinden, nehmlich:

a. Aus 3 Seiten und 2 einander gegenüberliegenden Winkeln.

b. Aus 2 einander nicht gegenüberliegenden Winkeln und 3 Seiten, welche einen der gegebenen Winkel einschließen.

c. Aus 3 Seiten und den beyden Winkeln, welche auf der unbekannten Seite liegen.

d. Aus 3 Seiten und den beyden Winkeln, welchen diese Seiten bilden.

e. Aus 3 Winkeln und zwey zusammenhängenden Seiten, zwischen welchen der unbekannte Winkel liegt.

f. Aus 3 Winkeln und zwey zusammenhängenden Seiten, welche zwischen dem gegebenen Winkel liegen.

g. Aus zwey zusammenhängenden Seiten und 3 Winkeln, wovon einer zwischen diesen Seiten, die beyden andern aber von einer an den unbekannten liegen.

h. Aus 2 gegenüberliegenden Seiten und 3 Winkeln.

i. Aus 4 Seiten und einem Winkel.

51) Ein gleichschenkliches Dreyeck zu verzeichnen, in welchem jeder der beyden gleichen Winkel doppelt so groß ist, als der dritte Winkel.

52) Aus der Grundlinie, der Höhe und dem Winkel an der Spitze ein Dreyeck zu construiren.

53) Aus der Grundlinie und dem gegebenen Verhältniß der beyden andern Seiten ein Dreyeck zu construiren.

54) Eine gerade Linie so in 2 Theile zu theilen, daß der erste sich zum zweyten verhält, wie der zweyte zur ganzen Linie (in stetige Proportion theilen).

Zu diesen Aufgaben kann leicht noch eine große Zahl ähnlicher Elementar-Aufgaben hinzugefügt werden.

Anmerk. Nach Beendigung der Planimetrie sieht man wohl leicht ein, wie man den Satz (§. 44. No. 6) für Linien mittelst Hülfe des (§. 47. No. 8. Fig. 12.) sehr leicht hätte beweisen können. Gilt er für Linien, so gilt er auch für Flächenfiguren, da sich Flächen in gleich große ähnliche Flächen verwandeln lassen und diese sich verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten; und diese Seiten proportionirt sind, sobald dasselbe von ihren Quadraten angenommen ist und umgekehrt. Die Ausführung dieser Beweise überlassen wir dem Leser, da sie keine Schwierigkeiten hat.

Elementar-Geometrie.

Rein geometrischer Theil.

III. Stereometrie.

§. 51.

Eine Linie und ein Punkt ausser ihr, zwey sich schneidende und zwey parallele Linien bilden die Lage einer Ebene.

Eine Linie schneidet eine Ebene in einem Punkte, und eine Linie die mit einer Ebene zwey Punkte gemein hat, liegt mit allen ihren Punkten in ihr.

Zwey Ebenen durchschneiden sich in einer geraden Linie, und haben zwey Ebenen ausser dieser geraden Linie nur noch einen einzigen Punkt mit einander gemein, so fallen sie in eine einzige Ebene zusammen.

Vier und mehr Punkte liegen nicht immer in einer Ebene; auch nicht immer 2 und mehr Linien.

Daher sind auf eine Linie von einem Punkte in ihr unzähliche senkrechte, aber von einem Punkte ausser ihr nur eine senkrechte möglich.

Anmerk. Man sieht leicht, daß in (§. 32. No. 4.) es ausdrücklich heißen muß: in einer Ebene,

was dort nur weggelassen ist, in so fern in der Planimetrie immer nur von einer Ebene die Rede ist. Hier muß man sorgfältig darauf sehen, mit welchen Ebenen man es immer zu thun habe.

§. 52. Bewegt sich eine unbegrenzte Ebene um eine gerade Grenzlinie derselben, so entsteht ein körperlicher Raum, der von zwey sich schneidenden Ebenen allein begrenzt, nach allen übrigen Seiten zu aber unbegrenzt ist; ein solcher heißt ein Flächenwinkel, die gerade Linie die Scheitellinie, die Ebene selbst die Schenkel des Flächenwinkels. Bezeichnung desselben.

§. 53. Was von Linienwinkeln gesagt würde von (§. 18) an bis (§. 26.) muß hier wörtlich für Flächenwinkel wiederholt werden, nur hier immer Scheitellinie statt dort Spitze gesetzt.

§. 54. Desgleichen müssen nun hier die 4 Sätze (§. 27) folgen, dergestalt abgeändert, daß hier Ebenen sich in parallelen Linien schneiden, wo dort Linien sich in Punkten schneiden. — Die Beweise aller hiesigen Sätze, werden übrigens gerade wie die der dortigen geführt.

§. 55. Ferner kommen nun die Sätze (§. 28) mit der Abänderung, daß hier immer Ebene gesetzt wird, wo dort Linie steht. Vermehrt werden sie noch um 5). Werden parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien auch parallel. (Wird indirekt bewiesen).

§. 56. Nach Beendigung der Lehre von den Flächenwinkeln, müssen wir auch die Lage von Linien zu Flächen betrachten:

1) Eine Linie, welche auf zweyen Linien in einer Ebene senkrecht steht, steht senkrecht auf allen Linien, die durch denselben Punkt in der Ebene gezogen werden können.

Man sagt in diesem Falle: sie stehe senkrecht auf der Ebene. Sobald aber eine Linie nicht auf allen Linien in der Ebene, die durch

den Durchschnittspunkt gezogen werden können, senkrecht steht, sagt man, sie stehe schief auf der Ebene. Fällt man dann von einem Punkt dieser schiefen Linie auf die Ebene eine senkrechte und verbindet die beyden Durchschnittspunkte in der Ebene, so heißt der Winkel, der die schiefe Linie mit dieser letztern Linie in der Ebene bildet, der Neigungswinkel dieser schiefen Linie gegen die Ebene.

2) Von einem Punkte in und ausserhalb einer Ebene ist nur eine senkrechte auf die Ebene möglich.

3) Wenn von 2 parallelen Linien die eine senkrecht auf einer Ebene steht, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene.

4) Wenn zwey Linien senkrecht auf einer Ebene stehen, laufen sie mit einander parallel.

5) Wenn zwey Linien im Raume einer dritten im Raume parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

6) Winkel, die von parallelen Schenkeln gebildet werden, sind einander gleich.

7) Wenn man aus Punkten in der Scheitellinie eines Flächenwinkels, Linien senkrecht auf die Scheitellinie zieht, in beyden Ebenen (Schenkeln) des Flächenwinkels, so sind die Winkel, welche je zwey aus einem Punkte ausgehende Linien bilden, alle einander gleich (weil sie von parallelen Schenkeln gebildet werden). —

Man nennt einen solchen Winkel den Neigungswinkel der beyden Ebenen, eigentlicher den dem Flächenwinkel correspondirenden Linienwinkel.

8) Die Scheitellinie des Flächenwinkels steht immer auf der Ebene des correspondirenden Linienwinkels senkrecht.

9) Gleiche Flächenwinkel haben auch gleiche cor=

espondirende Linienwinkel und umgekehrt: sind die correspondirenden Linienwinkel einander gleich, so sind es auch die Flächenwinkel.

10) Flächenwinkel und ihre correspondirenden Linienwinkel, haben zu einander immer gleiches Verhältniß (stehen in Proportion).

11) Ein flacher, rechter, stumpfer, spitzer Flächenwinkel hat auch immer einen flachen, rechten, stumpfen, spitzen correspondirenden Linienwinkel.

12) Fällt man aus einem Punkt des correspondirenden Linienwinkels in der Ebene desselben auf den andern Schenkel desselben eine senkrechte Linie, so ist solche auch senkrecht auf dem Schenkel (Ebene) des Flächenwinkels.

13) Fällt man von demselben Punkt aus eine senkrechte auf den Schenkel (Ebene) des Flächenwinkels, so steht sie auch senkrecht auf dem Schenkel des correspondirenden Linienwinkels.

14) Wenn aus einem Punkte des Schenkels eines Flächenwinkels auf den andern Schenkel (Ebene) eine senkrechte Linie gefällt wird, und wenn diese Linie zugleich senkrecht steht auf dem Schenkel des correspondirenden Linienwinkels, so liegt gedachter Punkt auch in dem andern Schenkel des letztern Winkels.

15) Steht eine Linie senkrecht auf einer Ebene, so steht auch jede Ebene, die durch diese Linie gelegt wird, senkrecht auf ersterer.

16) Errichtet man in dem einen Schenkel eines rechten Flächenwinkels auf die Scheitellinie eine senkrechte, so steht diese auch auf dem Schenkel (Ebene) des Flächenwinkels senkrecht.

17) Stehen zwey sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten, so steht ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie ebenfalls auf der dritten Ebene senkrecht.

18) Zwey Ebenen, die auf einer Linie senkrecht stehen, sind parallel.

19) Umgekehrt: steht eine Linie auf einer Ebene senkrecht, so steht sie auch senkrecht auf allen Ebenen, die mit der erstern parallel laufen.

20) Wenn zwey sich schneidende Linien mit zwey andern schneidenden Linien parallel sind, so sind auch die durch die schneidenden Linien gebildeten Ebenen mit einander parallel.

21) Wenn in parallelen Ebenen gleiche Winkel ein Paar parallele Schenkel haben, so sind auch die beyden andern Schenkel parallel, wenn sie nach derselben Richtung zu liegen.

22) Parallele Linien haben gegen eine Ebene gleiche Neigungswinkel.

23) Wenn eine Linie mit einer Ebene parallel ist (eigentlich mit einer Linie in der Ebene parallel ist) so ist diese Linie von der Ebene allenthalben gleich entfernt.

24) Parallele Ebenen sind allenthalben gleichweit entfernt.

25) Wenn zwey Punkte auf einer Seite liegend gleich weit von einer Ebene entfernt sind, so geht die Ebene, welche parallel mit jener durch einen der Punkte gelegt ist, auch durch den andern Punkt.

26) Wenn 3 Punkte einer Ebene von einer andern Ebene gleich entfernt sind, so sind die Ebenen parallel.

27) Wenn zwey Ebenen von einer dritten gleich entfernt sind, und beyde auf einer und derselben Seite liegen, so fallen sie in eine einzige zusammen.

28) Steht eine Linie schief auf einer Ebene, so steht jede durch diese Linie gelegte Ebene ebenfalls schief, die einzige ausgenommen, in der ihr Neigungswinkel liegt, und welche senkrecht

auf der Ebene steht. Unter allen den Ebenen, die durch die schiefe Linie gelegt werden können, bildet diejenige, die senkrecht auf der Ebene des Neigungswinkels der schiefen Linie steht, mit der erstern Ebene den kleinsten und größten Flächenwinkel. Auf beyden Seiten der Ebene des Neigungswinkels lassen sich durch die schiefe Linie immer 2 Ebenen legen, die mit der erstern Ebene gleiche Flächenwinkel bilden.

19) Errichtet man aus einem Punkte in der Scheitellinie eines Flächenwinkels senkrechte Linien auf die Schenkel desselben (Ebenen), so bilden solche immer zwey Winkel; der eine davon ist dem correspondirenden Winkel des Flächenwinkels gleich, der andere seinem Nebenwinkel.

§. 57. Wenn ein Flächenwinkel von einer dritten Ebene geschnitten wird, so daß sich die drey Ebenen in einem gemeinschaftlichen Punkte schneiden, so entsteht ein körperlicher Raum, der nur noch auf einer Seite unbegrenzt ist. Einen solchen nennt man ein körperliches Dreyeck; die 3 Ebenen, die es begrenzen, heißen die Seiten, die Flächenwinkel, welche diese bilden, heißen die Winkel des körperlichen Dreyecks; die Scheitellinien der Winkel aber die Kanten desselben.

§. 58. 1) Denkt man sich die 3 Ebenen eines körperlichen Dreyecks verlängert, so entstehen 8 körperliche Dreyecke, von denen immer je 2 an der Spitze einander gerade entgegenstehen und deren Winkel und Seiten Scheitelflächenwinkel und Scheitellinienwinkel, folglich einander gleich sind. Diese nenne ich Scheiteldreyecke. Zwey Scheiteldreyecke haben also gleiche Seiten und gleiche Winkel, aber ohne daß sie congruent wären (d. h. ohne daß sie mit allen ihren Grenzen auf einander fal-

len können) weil die gleichen Seiten und Winkel in beyden zwar in derselben Ordnung, aber in verschiedener Richtung, auf einander folgen.

2) Errichtet man aus der Spitze eines körperlichen Dreyecks auch die 3 Seiten desselben senkrechte Linien, so bilden diese ebenfalls 8 körperliche Dreyecke. Zwey davon haben Seiten, welche die Winkel, und Winkel, welche die Seiten des gegebenen zu einem flachen Winkel ergänzen. (§. 56. No. 29.)

Anmerk. Es versteht sich, daß man hier gleichartige Winkel, d. h. entweder lauter Linienwinkel, oder lauter Flächenwinkel nehmen muß. Da man statt der Flächenwinkel, also auch statt der Winkel eines körperlichen Dreyecks, immer die correspondirenden Linienwinkel setzen kann, so werden wir dieses in der Folge immer stillschweigend voraussetzen. — Man kann auch von vorliegenden Dreyecken das Eine das Ergänzungs-Dreyeck des andern nennen.

3) Die Summe aller 3 Seiten eines körperlichen Dreyecks ist immer kleiner als zwey flache Winkel (Dreyecke nehmlich, die andere als hohle Seiten und Winkel haben, werden hier nicht betrachtet.)

4) Die Summe aller 3 Winkel eines körperlichen Dreyecks ist immer größer als ein flacher Winkel und kleiner als drey flache. (Wegen der Ergänzungs-Dreyecke.)

5) In jedem rechtwinklich körperlichen Dreyeck, sind die beyden Katheten mit ihren gegenüberstehenden Winkeln immer gleichartig (beyde spitz oder beyde stumpf.)

6) Die Hypothenuse eines rechtwinklich körperlichen Dreyecks ist ein rechter Winkel, wenn ein an ihr liegender Winkel ein rechter ist; dagegen kleiner oder größer als ein rechter, wenn beyde an ihr liegende Winkel (oder beyde Katheten) gleichartig oder ungleichartig sind.

7) Im schiefwinklichen Dreyecke fällt die Ebene, die durch eine Kante senkrecht auf die gegenüberstehende Seite gefällt wird, innerhalb des Dreyecks oder ausserhalb desselben, je nachdem die Winkel an den beyden andern Kanten gleichartig oder ungleichartig sind.

§. 59. Zwey körperliche Dreyecke sind congruent (oder es ist wenigstens das Eine dem Scheiteldreyeck des andern congruent):

I. wenn eine Seite und zwey anliegende Winkel

II. wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind,

III. wenn alle 3 Seiten gleich sind

IV. wenn alle 3 Winkel gleich sind,

V. wenn zwey Seiten und ein gegenüberstehender Winkel gleich sind, und die Summe der beyden andern gegenüberstehenden größer oder kleiner als ein flacher Winkel ist; endlich

VI. wenn zwey Winkel und eine gegenüberstehende Seite gleich sind, und die Summe der beyden andern gegenüberstehenden Seiten größer oder kleiner als ein flacher Winkel ist.

Die Beweise von I. III. V. werden durch Aufeinanderlegen geführt. Die Sätze II. IV. VI. aber folgen daraus, daß zwey Dreyecke congruent seyn müssen, sobald ihre Ergänzungsdreyecke es sind.

Anmerk. In congruenten Dreyecken sind alle Seiten und Winkel gleich, die bey dem Aufeinanderlegen aufeinander fallen. Wäre aber ein Dreyeck einem andern nicht congruent, aber wohl dem Scheiteldreyeck des andern, so sind doch auch in den beyden nicht congruenten Dreyecken die Winkel und Seiten beziehlich einander gleich. (weil Scheiteldreyecke gleiche Winkel und gleiche Seiten haben.)

§. 60. Es finden nächst der Congruenz der körperlichen Dreyecke auch noch dieselben 5 Sätze

statt, die (§. 40.) für ebene Dreyecke statt finden, wenn man nur die hiesigen Seiten und Winkel statt der dortigen setzt. — Diese müssen hier wiederholt werden. —

Anmerk. Man kann auch leicht noch mehrere den Sätzen in (§. 41) ähnliche Folgerungen hier statt finden lassen. — Eben so kann man nächst den körperlichen Dreyecken, auch körperliche Vierecke, Fünfecke, ꝛc. Vielecke (wo 4, 5 und mehr Ebenen sich in einem Punkte schneiden) die ich künftig im allgemeinen körperliche Winkel nennen will, in Betrachtung ziehen.

§. 61. Wird ein körperliches Dreyeck, Viereck ꝛc. Vieleck durch eine neue Ebene völlig begrenzt, so entsteht die dreyseitige, vierseitige, ꝛc. vielseitige Pyramide. Grundfläche, Spitze, Seitenflächen, Seitenlinien, Kanten, Höhe der Pyramide.

§. 62. Es erhellet sogleich:

1) Sind die Seiten (Seitenlinien) einer Pyramide alle einander gleich, so ist die Grundfläche eine reguläre Figur und die Höhe trifft in den Mittelpunkt derselben, und die Seitenlinien haben alle gleiche Neigungswinkel gegen die Grundfläche.

2) Ist die Grundfläche regulär und geht die Höhe der Pyramide durch den Mittelpunkt der Figur, so steht die Spitze von allen Ecken der Grundfläche gleich weit ab.

Solche Pyramiden nennt man senkrechte oder auch gleichseitige; ausserdem aber ungleichseitige.

3) Die Seitenflächen schneiden eine mit der Grundfläche parallele Ebene in einer Durchschnittsfigur, welche der Grundfläche ähnlich ist, und es verhalten sich die Flächen dieser Durchschnittsfiguren, wie die Quadrate der Höhen, der abgeschnittenen Pyramiden.

§. 63. Werden durch die Endpunkte eines ebenen Dreyecks, Vierecks, ꝛc. Vielecks, parallele Linien senkrecht oder schief auf die Ebene gelegt und verlängert, bis sie eine andere parallele Ebene schneiden; verbindet man ferner diese Durchschnitts-Punkte nach der Ordnung mit Linien, so entsteht eine Figur, die mit der erstern congruent ist. Denkt man sich dann durch je zwey auf einander folgende dieser parallelen Linien Ebenen gelegt, so entsteht ein völlig begrenzter Körper mit zwey parallelen congruenten Grundflächen und mit so vielen Parallelogrammen als Seitenflächen, wie die Grundflächen Seiten haben. Einen solchen Körper nennt man ein dreyseitiges, vierseitiges ꝛc. vielseitiges Prisma. Seitenlinien, Kanten, Höhe des Prisma.

§. 64. 1) Wenn eine Seitenlinie auf den Grundflächen senkrecht steht, so stehen sie alle senkrecht; desgleichen stehen dann alle Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht. Senkrechtes Prisma.

2) Stehet aber eine Seitenlinie schief auf den Grundflächen, so stehen sie alle schief; dennoch kann ein solches schiefes Prisma einige senkrecht stehende Seitenflächen haben.

3) Stehen zwey zusammenstoßende Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen, so steht auch ihre gemeinschaftliche Seitenlinie, folglich stehen auch alle Seitenlinien auf den Grundflächen senkrecht.

4) Daher können in einem schiefen Prisma nie zwey zusammenstoßende Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen stehen.

5) Im senkrechten Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke.

6) Sind zwey zusammenstoßende Seitenflächen Rechtecke, so ist das Prisma ein senkrechtes.

7) Die Seitenflächen eines Prisma schneiden jede mit den Grundflächen parallele Ebene in einer Durchschnittsfigur, welche den Grundflächen congruent ist.

§. 65. Denkt man sich durch einen Punkt in dem Umfange eines Kreises eine Linie, welche die Ebene des Kreises in diesem einzigen Punkte trift; denkt man sich ferner diese Linie um einen ihrer ausserhalb der Kreisfläche liegenden Punkte dergestalt herumbewegt, daß sie alle Punkte der Kreislinie durchläuft, so beschreibt solche einen völlig begrenzten körperlichen Raum, welcher Kegel genannt wird. Grundfläche, Höhe, Spitze, Axe des Kegels. Senkrechter Kegel, schiefer Kegel, je nachdem die Axe senkrecht, oder schief auf der Grundfläche steht.

§. 66. 1) Im senkrechten Kegel sind die Linien aus der Spitze nach irgend einem Punkte der Kreislinie der Grundfläche gezogen alle einander gleich.

2) Sind diese Linien alle einander gleich, so ist der Kegel ein senkrechter.

3) Die Seitenfläche des Kegels (conische Oberfläche) schneidet jede mit der Grundfläche parallele Ebene in einem Kreise. Diese Kreisflächen verhalten sich immer, wie die Quadrate der Höhen oder wie die Quadrate der Axen der abgeschnittenen Kegel.

4) Jeder Kegel ist als eine Pyramide anzusehen, deren Grundfläche ein Vieleck ist von unendlich vielen Seiten; deren Seitenflächen, wegen der unendlich kleinen Grundlinien, in gerade Linien übergehen.

5) Eine Ebene durch die Spitze des Kegels und durch den Durchmesser oder durch eine

Sehne der Grundfläche gelegt, wird von der Oberfläche des Kegels in ein Dreyeck geschnitten. — Alle Ebenen, die nicht durch die Spitze gehen, werden von der conischen Oberfläche in krummen Linien geschnitten, welche mit andern in der höhern Geometrie unter dem Namen der Kegelschnitte (Parabel, Ellipse, Hyperbel) betrachtet werden.

6) Im senkrechten Kegel ist die conische Oberfläche einem Sektor gleich, welcher die Seite des Kegels zum Radius hat und dessen Bogen dem Umfange der Grundfläche gleich ist.

§. 67. Legt man durch den Mittelpunkt einer Kreislinie eine Linie, welche die Ebene der Kreislinie nur in diesem einzigen Punkte trifft; denkt man sich ferner in der Kreislinie eine zweyte Linie sich so herumbewegend, daß sie immer mit jener erstern Linie parallel bleibt, so schneidet diese Linie auf einer parallelen Ebene eine Figur ab, welche ein dem erstern congruenter Kreis ist; und jene erste Linie geht auch durch dieses zweyten Kreises Mittelpunkt. Der ganze dadurch entstandene völlig begrenzte Körper heißt ein Cylinder. Grundflächen, Höhe, Axe des Cylinders; senkrechter, schiefer Cylinder.

§. 68. 1) Im senkrechten Cylinder liegt jede in der Kreislinie der einen Grundfläche auf diese errichtete senkrechte Linie mit allen ihren Punkten in der Cylinderfläche.

2) Wenn diese senkrechte Linie ganz in der Cylinderfläche liegt, so ist der Cylinder ein senkrechter.

3) Jede durch die Axe oder parallel mit der Axe gelegte Ebene, wird von der Oberfläche des Cylinders in ein Parallelogramm geschnitten.

4) Jede mit den Grundflächen parallele Ebene wird von der Cylinderfläche in einen Kreis geschnitten, der der Grundfläche congruent ist, und dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

5) Im senkrechten Cylinder ist die cylindrische Oberfläche gleich einem Rechteck, dessen Höhe der Höhe oder der Axe des Cylinders, dessen Grundlinien aber den Peripherien der Grundflächen gleich sind.

§. 69. Bewegt sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser, so beschreibt solcher eine Kugel. Durchmesser, Halbmesser, Mittelpunkt der Kugel.

§. 70. 1) Jede Ebene wird von der Kugelfläche in einen Kreis geschnitten, und die Linie aus dem Mittelpunkte der Kugel senkrecht auf die Ebene gezogen, geht durch den Mittelpunkt dieses Kreises.

2) Die Linie aus dem Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte eines Kugelkreises gezogen, steht senkrecht auf diesem.

3) Jede Linie, welche durch den Mittelpunkt eines Kugelkreises hindurchgehend, senkrecht auf selbigem steht, geht auch durch den Mittelpunkt der Kugel.

4) Kugelkreise, die gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, sind einander gleich; und umgekehrt.

5) Je größer ein Kugelkreis ist, desto näher liegt er dem Mittelpunkt der Kugel; und umgekehrt. — Der durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Kugelkreis ist der größte von allen (der größte Kreis der Kugel).

6) Werden mehrere parallele Kugelkreise gedacht, so liegen ihre Mittelpunkte und der Mittelpunkt der Kugel in einer und derselben geraden Linie. Sie heißt die Axe dieser Parallelkreise. Die Punkte der Kugelfläche, wo solche von der Axe getroffen wird, sind die Pole der Axe oder der Parallelkreise.

7) Legt man durch die Axe beliebige Ebenen,

welche größte Kreise der Kugel geben, so sind die Bogen dieser größten Kreise vom Pole an bis zu einem und demselben Parallelkreis alle einander gleich.

8) Umgekehrt: sind die Bogen zweyer größten Kreise, die durch einen Punkt hindurchgehen, von diesem Punkte an bis zu diesem Parallelkreis einander gleich, so ist der durch diesen Punkt gezogene Durchmesser der Kugel die Axe des Parallelkreises.

9) Denkt man sich um die Kugel einen senkrechten Cylinder beschrieben, so daß die Axe der Kugel zugleich Axe des Cylinders und der größte Kreis der Kugel dessen Grundflächen congruent ist, so ist jeder von zwey mit den Grundflächen parallelen Kreise abgeschnittene Theil der Kugelfläche allemal gleich dem durch die verlängerten Ebenen der Parallelkreise abgeschnittenen Theil der cylindrischen Oberfläche.

10) Daher die ganze Kugel-Oberfläche gleich der ganzen cylindrischen Oberfläche (ohne die beyden Grundflächen.)

11) Folglich ist auch die Kugel-Oberfläche gleich dem vierfachen ihres größten Kreises.

Anmerk. Denkt man sich die Spitzen körperlicher Dreyecke in dem Mittelpunkte einer Kugel, so schneiden die Seiten desselben von der Oberfläche Stücke ab, welche sphärische Dreyecke genannt werden. Man sieht ein

1) daß zu gleichen körperlichen Dreyecken auch gleiche (congruente) sphärische Dreyecke gehören und umgekehrt.

2) Was daher (§. 59 u. folg.) von körperlichen Dreyecken gesagt wurde, gilt auch mit der gehörigen Abänderung für sphärische Dreyecke.

§. 71. Ein begrenzter körperlicher Raum läßt sich um einen andern vermehren und vermindern; auch kann man untersuchen wie einer aus dem andern sich erzeugen läßt (wie beyde

sich zu einander verhalten) daher dieselben Begriffe für Summen, Differenzen ꝛc. wie (§. 33.) für die begrenzten Ebenen.

§. 72. Congruente, gleiche, grössere, kleinere Körper; dieselben Begriffe hier für Körper wiederholt, wie sie (§. 34) von den Flächenfiguren gegeben sind.

§. 73. Die 5 Sätze (§. 35) hier für Körper wiederholt; desgleichen die 7 Sätze von den Summen und Differenzen der Körper (§. 36); nicht minder die 14 Sätze (§. 37 oder 12), so wie auch die Sätze (§. 38 oder 13 — 15); immer hier für Körper gehörig abgeändert, übrigens wörtlich.

§. 74. Zwey Pyramiden sind congruent:

I. Wenn sie congruente Grundflächen haben, und drey Seitenflächen mit der Grundfläche gleiche Flächenwinkel bilden.

II. Wenn die Grundflächen congruent sind, zwey Seitenflächen gleiche Flächenwinkel mit den Grundflächen bilden und die den beyden Seitenflächen gemeinschaftliche Seitenlinie in beyden gleich ist.

III. Wenn die Grundflächen und eine Seitenfläche congruent sind, und der Flächenwinkel gleich ist, den die Seitenfläche mit der Grundfläche bildet.

Zwey Prismen sind in den beyden letzten Fällen ebenfalls congruent.

§. 75. 1) Sind die Grundflächen eines Prisma Parallelogramme und legt man durch die beyden gegenüberstehenden Seitenlinien eine Ebene, so theilt solche das 4seitige Prisma in 2 congruente 3seitige Prisma.

2) Wegen der gleichen Wechselflächenwinkel sind daher auch die gegenüberstehenden Seitenflächen parallel und die gegenüberstehenden körperlichen Dreyecke gleich (congruent). — Weil

dieser Körper von lauter parallelen Seitenflächen begrenzt wird, heißt er insbesondere ein Parallelepipedum.

3) Umgekehrt: in einem Parallelepipedo, sind die gegenüberstehenden Seitenflächen congruente Parallelogramme, die gegenüberstehenden körperlichen Dreyecke congruent; und jedes Paar Seitenflächen auch als Grundflächen anzusehen.

4) Sind Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke, so hat man ein rechtwinkliches Parallelepipedum. Solche sind congruent, wenn sie 3 gleiche auf einander senkrecht stehende Kanten haben.

5) Sind diese 3 zusammenstoßenden Kanten einander gleich, so hat man einen Kubus oder Würfel. Zwey Würfel sind congruent, wenn sie eine gleiche Kante haben.

6) Ein Würfel wird von 6 Quadraten begrenzt.

§. 76. I. Zwey Kegel, zwey Cylinder sind congruent, wenn sie congruente Grundflächen, gleiche Axen haben und letztere mit erstern gleiche Neigungswinkel bilden.

II. Zwey Kugeln sind congruent, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

§. 77. Nächst der Congruenz kommen wir zur Gleichheit der Körper:

I. Prismen sind gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

II. Pyramiden sind gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

III. Eine Pyramide ist der dritte Theil von einem Prisma, wenn beyde gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Anmerk. Man kann den Satz I. für Parallelepipeda mit congruenten Grundflächen und einem gleichen Flächenwinkel an selbigen, gerade wie den Satz (§. 42. I) beweisen. Dann läßt er sich für Parallelepipeda mit congruenten Grundflächen,

und

und gleichen Höhen (in so fern beyde einem dritten gleich sind) ausdehnen; nicht minder dann auf 3seitige Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen. Da nun gleiche Flächen aus denselben congruenten Flächen und eben so gleiche Körper aus denselben congruenten Körpern bestehen, so gilt unser Satz auch für Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen.

Allein sowohl für diesen, als auch für den folgenden Satz II. kann der gewöhnliche Beweis (die Körper sind gleich, weil ihre von den Grundflächen gleich weit abstehenden Durchschnittsflächen gleich sind), unsern bisher aufgestellten Begriffen gemäß, recht füglich statt finden, um so mehr, da die Richtigkeit des Schlusses eben durch den erstern Beweis von I. bestätigt wird.

§. 78. Hieraus geht hervor:

1) Zwey Kegel, zwey Cylinder, ein Kegel und eine Pyramide, ein Prisma und ein Cylinder sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

2) Ein Kegel ist der dritte Theil von einem Cylinder, von einem Prisma, auch ist eine Pyramide der dritte Theil von einem Cylinder, wenn beyde gleiche Grundflächen und gleich Höhen haben.

3) Eine Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche der Oberfläche der Kugel, deren Höhe dem Radius der Kugel gleich ist.

4) Eine Kugel ist zwey Drittheile des um sie beschriebenen Cylinders, der den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche, ihren Durchmesser aber zur Höhe hat.

5) Nennt man reguläre Körper diejenigen, welche von lauter regulären Figuren, die lauter gleiche körperliche Winkel bilden, begrenzt sind; so ist leicht einzusehen, daß es deren nur 5 geben kann: 1) das Tetraëder; 2) das Oktaëder; 3) das Hexaëder (Würfel); 4)

das Dodekaëder; endlich 5) das Ikosaëder. Um jeden dieser regulären Körper läßt sich eine Kugel beschreiben; ihr Mittelpunkt kann auch der Mittelpunkt des Körpers genannt werden. Jeder solche reguläre Körper ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche gleich ist der ganzen Oberfläche des Körpers, deren Höhe aber dem Abstand des Mittelpunkts von einer der Grenzflächen, (oder dem halben Abstand zweyer gegenüberliegender (paralleler) Grenzflächen) gleich ist.

Von den Verhältnissen und Proportionen der Körper und der Flächen und Linien in ihnen.

§. 79. I. Zwey 3seitige Pyramiden, die zwey congruente körperliche Winkel haben, haben auch proportionirte Kanten und ähnliche und proportionirte Grenzflächen, und alle übrigen körperlichen Winkel sind congruent (gleich). Solche Pyramiden nennt man ähnliche.

II. Wenn zwey dreyseitige Pyramiden einen gleichen körperlichen Winkel haben und die Kanten die solchen einschließen proportionirt, oder die 2 einschließenden Seitenflächen ähnlich sind, so sind alle übrigen körperlichen Winkel congruent und alle übrigen Kanten proportionirt, so wie alle übrigen Grenzflächen ähnlich.

III. Wenn in zwey dreyseitigen Pyramiden alle Kanten proportionirt oder alle Grenzflächen ähnlich sind, so sind auch alle körperlichen Winkel gleich und die Pyramiden sind ähnlich.

Anmerk. Man muß hier nochmal die Sätze (§§. 44 und 45.) wiederholen und bemerken, daß sie auch gelten, wenn unter den Raumgrößen auch Körper vorkommen.

§. 80. Hieraus folgt:

1) Dieselben 3 Sätze gelten auch für beliebig vielseitige Pyramiden.

2) Legt man durch eine Pyramide eine Ebene parallel mit der Grundfläche, so sind alle Kanten und alle Seitenflächen der abgeschnittenen und der ganzen Pyramide proportionirt und umgekehrt: sind die Kanten proportionirt, so ist die Ebene parallel mit der Grundfläche.

2*) Alle Pyramiden sind ähnlich, welche ähnliche reguläre Grundflächen haben, und in denen die Axe mit den Grundflächen gleiche Winkel bildet und mit einer ähnlich liegenden Seite proportionirt ist.

3) Haben zwey beliebige Körper gleiche körperliche Winkel und proportionirte Kanten oder ähnliche Seitenflächen, so sind alle die Pyramiden ähnlich, in welche die Körper durch Diagonal-Ebenen aus gleichen Winkelspitzen zerlegt werden können. Solche Körper nennt man überhaupt **ähnliche** Körper.

4) Umgekehrt: sind die Pyramiden alle ähnlich, so sind es auch die Körper.

Anmerk. Es versteht sich immer, daß in den beyden Raumgrößen die Ordnung und Richtung der Theile dieselbe ist.

5) Alle regulären Körper einerlei Art sind ähnlich.

6) Alle Kugeln sind ähnlich.

7) Alle Kugelausschnitte der Kugel entweder durch 2 größte Kreise, die gleiche Flächenwinkel bilden, oder durch 3 und mehr größte Kreise, die gleiche körperliche Winkel bilden, oder durch eine Kegelfläche eines senkrechten Kegels, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Kugel liegt, sobald diese Kegelflächen ähnlich sind, sind ebenfalls ähnlich.

8) Alle Kegel sind ähnlich, in denen die Axe mit der Grundfläche einen gleichen Winkel bildet, und mit dem Durchmesser proportionirt ist.

Anmerk. Zwey solche Kegel kann man sagen haben gleiche Winkel an der Spitze.

9) Alle senkrechte Kegel sind ähnlich, die gleiche Winkel an der Spitze haben (oder in denen die Axe mit dem Durchmesser proportionirt ist.)

10) Alle rechtwinklichen Parallelepipeda sind ähnlich, in denen 3 zusammenstoßende Kanten proportionirt sind.

11) Alle Parallelepipeda sind ähnlich, die einen gleichen körperlichen Winkel haben, und in denen die drey zusammenstoßenden Kanten proportionirt sind.

12) Alle Prismen sind ähnlich, die ähnliche Grundflächen haben und in denen die Seitenlinien mit zweyen homologen Seiten der Grundflächen proportionirt sind, wenn zugleich zwey zusammenstoßende Seitenflächen gegen die Grundflächen gleiche Neigung haben.

13) Alle Cylinder sind ähnlich, in denen die Axen gleiche Neigung zu den Grundflächen haben und mit den Durchmessern proportionirt sind.

14) In ähnlichen Körpern verhalten sich die Summen von gleich viel homologen Kanten wie ein Paar derselben; desgleichen die Summe von gleich viel homologen Seitenflächen wie ein Paar derselben.

15) Daher verhalten sich die Oberflächen ähnlicher Körper wie ein Paar homologer Seitenflächen.

16) Da sich aber ähnliche Flächenfiguren verhalten wie die Quadrate homologer Seiten, so verhalten sich auch die Oberflächen ähnlicher Körper, wie die Quadrate ähnlich liegender Kanten; eben so die Summe von gleich viel homologen Seitenflächen.

17) Die Oberflächen zweyer ähnlichen Kugelausschnitte verhalten sich daher wie die Quadrate

der Halbmesser oder wie die Quadrate der Durchmesser.

18) Kugelflächen verhalten sich also auch wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Eben so ähnliche Theile von Kugelflächen.

19) Aehnliche Kegelflächen oder Cylinderflächen verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder auch wie die Quadrate ihrer Axen.

§. 81. Hinsichtlich der Verhältnisse der Körper hat man zu bemerken:

I Rechtwinkliche Parallelepipeda verhalten sich, wenn zwey der 3 auf einander senkrecht stehenden Kanten gleich sind, wie die dritten Kanten.

II. Dieselben verhalten sich, wenn nur ein Paar der 3 Kanten gleich sind, wie die Rechtecke aus den beyden andern Kanten.

Anmerk. Man muß hier aber vorher bemerken, daß der Satz §. 49. n. 18*) auch gilt, wenn a, q, Körper bezeichnen.

§. 82. Hieraus folgt:

1) Rechtwinkliche Parallelepipeda verhalten sich bey congruenten Grundflächen, wie ihre Höhen, bey gleichen Höhen aber wie ihre Grundflächen.

2) Es verhält sich ein Prisma zu einem andern, zu einem Cylinder, ein Cylinder zu einem andern, eine Pyramide zu einer andern, zu einem Kegel, ein Kegel zu einem andern, bey gleichen Grundflächen wie ihre Höhen; bey gleichen Höhen wie ihre Grundflächen.

3) Sind zwey rechtwinkliche Parallelepipeda einander gleich, so verhalten sich die Rechtecke aus zwey der 3 Kanten umgekehrt wie die dritten Kanten.

4) Sind zwey Rechtecke und zwey Linien propor-

tionirt, so ist das rechtwinkliche Parallelepipedum, welches dies erste Rechteck zur Grundfläche, das 4te Glied der Proportion aber zur Höhe hat, gleich dem rechtwinklichen Parallelepipedo aus dem zweyten Rechteck als Grundfläche und dem dritten Gliede als Höhe.

5) Allgemein, sind zwey Prismen, oder zwey Pyramiden, oder zwey Cylinder, oder 2 Kegel, oder ein Prisma und ein Cylinder, oder eine Pyramide und ein Kegel einander gleich, so verhalten sich ihre Grundflächen wie umgekehrt ihre Höhen.

6) Sind zwey Flächen und zwey Linien mit einander proportionirt, so sind die beyden Prismen, Cylinder, Pyramiden, Kegel, oder das Prisma dem Cylinder, die Pyramide dem Kegel gleich, welche die Flächen zu Grundflächen und die Linien in umgekehrter Ordnung zu Höhen haben.

7) Sind von 12 Linien je 4 proportionirt, so sind die 4 rechtwinklichen Parallelepipeda aus den 3 gleichnamigen Gliedern (Linien) ebenfalls proportionirt.

8) Sind 4 rechtwinkliche Parallelepipeda, und auch 4 Kanten derselben proportionirt, so sind auch die 4 Rechtecke aus den beyden übrigen Kanten proportionirt.

9) Sind 4 rechtwinkliche Parallelepipeda und vorige 4 Rechtecke proportionirt, so sind auch die 4 übrigen Kanten proportionirt.

10) Sind 4 Linien proportionirt, so sind auch die 4 Kubi proportionirt, welche diese Linien zu Seiten haben.

11) Sind 4 Kubi proportionirt, so sind auch ihre Kanten proportionirt.

12) Sind 4 Rechtecke und 4 Linien proportionirt, so sind die 4 rechtwinklichen Parallelepipeda,

welche die gleichnamigen Glieder zu Grundlinien und Höhen haben, ebenfalls proportionirt.

13) Sind 4 Flächen und 4 Linien proportionirt, so sind auch die 4 Prismen, Cylinder, Pyramiden, Kegel ꝛc. proportionirt, welche die Flächen zu Grundflächen, die Linien aber zu Höhen haben.

14) Sind 4 Prismen, Cylinder, Pyramiden ꝛc. proportionirt und auch ihre Höhen, so sind es auch ihre Grundflächen.

15) Sind 4 Prismen, Cylinder, Pyramiden, ꝛc. proportionirt und auch ihre Grundflächen, so sind es auch ihre Höhen.

16) Ist $a : b = c : d$ und
$b : f = g : h$, so ist auch
$a : f = c.g : d.h$, wenn

1) a, b, f Körper, c, d, Flächen, g, h Linien
2) a, b, f Körper c, d, g, h Linien
3) a, b, f Flächen c, d Flächen g, h Linien
4) a, b, f Flächen c, d, g, h Linien
5) a, b, f Linien c, d Flächen, g, h Linien
6) a, b, f Linien c, d, g, h auch Linien bezeichnen.

Anmerk. Dieser Satz muß für alle 6 Fälle erwiesen werden. Für 4) und 6) ist er es schon (§. 49. n. 18*) und 18**). Die Beweise müssen hier eben so geführt werden, wie dort, allein man muß erst wissen, was c.g, d.h jedesmal bezeichnen sollen. In 1) 3) 5) nehmlich bezeichne ich durch c.g, d.h, zwey Prismen, Cylinder, Pyramiden ꝛc., welche c und d zu Grundflächen und g und h zu Höhen; in 2) 4) 6) bezeichnen aber c.g, d.h, zwey Rechtecke, Parallelogramme, Dreyecke ꝛc., welche c, d zu Grundlinien und g, h zu Höhen haben. Sind ferner A, B, C, drei Linien, so bezeichnet mir das Zeichnen A. B. C, ein rechtwinkliches Parallelepipedum, welches die 3 Kanten A, B, C, hat. Auch bezeichne ich durch A^c, B^c, C^c die Kubi deren Kanten beziehlich A oder B oder C, sind. Diese Bezeichnung muß man schon in den vorhergehenden Nummern

kennen, und der Lehrer thut gut, sie immer bloß da anzuführen, wo sie gerade gebraucht wird.

17) Ist a: b = c: d
b: f = g: h
f: k = m: n so ist auch

a: k = c. g. m: d. h. n, wenn die Buchstaben a, b, f, k 1) Linien oder 2) Flächen, oder 3) Körper bezeichnen; c, d, g, h, m, n bezeichnen hier immer Linien.

18) Ist noch g = d, so ist auch
a: k = c m: h. n, wo c, h, Linien und m, n Linien oder auch Flächen, oder wo c, h, Flächen, m, n, aber Linien bezeichnen.

19) Hat man auch noch h = m, so ist dann ebenfalls a: k = c: n wo c, n, Linien, Flächen oder Körper bezeichnen können.

Anmerk. Man sieht wie mannigfaltig diese Sätze werden, da in jedem der Fälle 18, 19, a u. k selber wieder Linien, Flächen oder Körper seyn können. Diese Beweise zu zergliedern und sie strenge aus den vorigen Begriffen abzuleiten, ohne daß nur irgend arithmetische Betrachtungen oder Operationen zu Grunde gelegt werden, ist hier Zweck und für den Schüler, in Bezug auf Entwicklung seiner Geisteskraft von unübersehbarem Nutzen. Dem Zweck des Werkchens (als Leitfaden) gemäß, dürfen die Beweise hier nicht stehen. Der denkende Lehrer wird sie, sobald er durch das Studium der Planimetrie in meine Lehre eingedrungen ist, selbst leicht entwickeln und für einen andern sind ohnedies diese Sätze unbrauchbar. Ich bemerke bloß, daß es bey den Beweisen aller dieser Sätze darauf ankommt, Proportionen zu erhalten, in welchen alle 4 Glieder Flächen oder alle viere Körper sind damit der Satz (n. 6. §. 44) angewendet werden kann. Nun werden aber Verhältnisse von Linien zu Verhältnissen von Flächen, wenn man den Linien noch eine gemeinschaftliche Linie als Höhe beylegt; desgleichen die Verhältnisse von Flächen auf dieselbe Weise zu Verhältnissen von Körpern. Bedenkt man dies gehörig und nimmt man den Beweis der (n. 17 §. 49)

als Vorbild zu Hülfe, so wird keiner der hier stehenden Sätze Schwierigkeiten machen

20) Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Kubi ihrer ähnlich liegenden Kanten.

21) Je zwey ähnliche Pyramiden in die zwey ähnliche Körper zerlegt werden können, so wie auch die Würfel ihrer Kanten, haben gleiches Verhältniß.

22) Daher auch die Summen von gleich viel dieser ähnlichen Pyramiden, mit einem Paare dieser Pyramiden und mit den Würfeln ihrer homologen Seiten gleiches Verhältniß haben.

23) Aehnliche Körper verhalten sich also auch wie die Kubi ihrer homologen Kanten.

24) Demnach auch ähnliche Kegel, ähnliche Cylinder, wie die Kubi ihrer Durchmesser oder wie die Kubi ihrer Axen.

25) Kugeln, ähnliche Kugelausschnitte, wie die Kubi ihrer Halbmesser oder wie die Kubi ihrer Durchmesser.

26) Reguläre Körper von einerlei Art verhalten sich daher ebenfalls wie die Kubi ihrer Kanten.

Anmerk. 1) Hier kann man den rein geometrischen Theil der Geometrie als beendigt ansehen, so daß wir nun zu dem rechnenden Theil übergehen können. Nochmals muß ich wiederholen, daß in dem bisher aufgestellten System alle Sätze streng und rein geometrisch, d. h. ganz ohne Beziehung arithmetischer Sätze oder arithmetischer Operationen bewiesen werden können und müssen. Wenn auch Zahlen vorkamen, so kam doch keine Zahlenlehre, d. h. kein Lehrsatz der Zahlen vor, und dies ist's was vermieden werden mußte.

Anmerk. 2) Um nicht von einigen, die gewohnt sind, jede Sache nur oberflächlich zu betrachten und sich dabey von ihren eigenen Begriffen nicht losreißen können, misverstanden zu werden, füge ich hier noch einen Beweis irgend einer der vorhergehenden Nummern, z. B. n. 20 bey. Seyen also P, p zwey ähnliche Pyramiden G, g ihre ähnlichen Grundflächen H, h ihre Höhen und K, k

irgend zwey ihrer ähnlich liegenden Kanten, so ist zu erweisen daß

$P : p = K^c : k^c$ ist. Beweis. Es ist: (§ 49. No 11) $G : g = K^q : k^q$ und auch wegen der Ähnlichkeit $H : h = K : k$ folglich nach No. 13 der Satz erwiesen.

Dieser Satz No. 13 aber folgt wieder unmittelbar aus No. 12 wegen der Gleichheit der Prismen, der Cylinder rc., die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. Diesen Satz No. 12 beweiset man dann, wie folgt: Seyen P, Q, R, S die Parallelepipeda, A, B, C, D die Rechtecke, f, g, h, k die Linien, so soll erwiesen werden, daß wenn $A : B = C : D$ und auch

$f : g = h : k$, dann seyn müsse

$P : Q = R : S$.

Beweis.

Es ist $A : B = A.f : B.f$*) $= C : D = C.h : D.h$ folglich $P : R = B.f : D.h$; eben so ist: $B.f : B.g = D.h : D.k$ oder $Q : S = B.f : D.h$ folglich $P : R = Q : S$ demnach $P : Q = R : S$ (§. 79. Anmerk. §. 44.) wo man jetzt bloß auf den Paragraphen selbst zurück geführt ist.

---

*) A.f, B.f, sollen hier die rechtwinklichen Parallelepipeda bezeichnen, die A, B zu Grundflächen und f, zur Höhe haben. Eben so die folgenden ähnlichen Bezeichnungen. Will man diese Bezeichnung nicht gebrauchen, so muß man vorher die Parallelepipeda einführen und durch eigene Buchstaben bezeichnen.

Elementar-Geometrie.

Rechnender Theil.

I. Von den Gemäßen und Maaßen im allgemeinen.

§. 83.

Was messen ist, und wie sich Gemäße und Maaße unterscheiden, ist schon oben (§. 4) angegeben worden. Eine Linie wird nehmlich durch eine Linie, eine Fläche durch eine Fläche, ein Körper durch einen Körper, überhaupt also eine Raumgröße A durch eine andre gleichartige Raumgröße B gemessen, wenn die letztere in der erstern ohne Rest enthalten ist. Die letztere Raumgröße heißt dann das Gemäß, die Zahl, die anzeigt, wieviel sie in der erstern enthalten ist, das Maas von A durch B, welches durch A: :B bezeichnet wird.

Da also ein Maas immer eine Zahl ist, so werden, wenn man aus gegebenen Maaßen andere Maaße sucht, eigentlich aus gegebenen Zahlen andre Zahlen gesucht, und in so fern kann dieser Theil der Geometrie nichts anders seyn als eine Anwendung der Zahlenlehre

auf Raumgrößen. Die Zahlenlehre wird also hier vorausgesetzt.

Anmerk. Der richtigern Ansicht wegen gebe ich hier die Hauptgrundzüge meiner Zahlenlehre an, so weit es die Kürze verstattet.

Die Zahlen lassen 7, auch noch mehr verschiedene Verbindungen zu. Alle Zahlen müssen wir bezeichnen. Daher die Zahlenlehre als eine Zahlzeichenlehre zu behandeln. Zahlen werden bezeichnet durch Buchstaben und durch 7 andere aus Buchstaben zusammengesetzte Zeichen, die man Summe, Differenz, ꝛc. ꝛc. Potenz ꝛc. Logarithme nennt. Diese 8 Zahlzeichen paarweise durch die 7 Operationen zu verbinden, und alle Zahlzeichen aufzusuchen, die statt eines jeden dieser entstandenen Zahlzeichen gesetzt werden können, ist die Aufgabe der Zahlenlehre. Eine geschlossene Anzahl einfachster Verbindungen auf diese Art mit einander verglichen, macht die Elementarzahlenlehre aus. Eine allgemeine Methode diese Vergleichungen anzustellen und bestimmten Zwecken gemäß zu gebrauchen, bildet die höhere Zahlenlehre. Die Elementarzahlenlehre stellt also nichts weiter als eine Anzahl Formeln auf, nach welchen ein einfaches Zahlzeichen und eine Summe, oder ein einfaches Zahlzeichen und eine Differenz u. s. w. ein einfaches Zahlzeichen und ein Logarithme zu einander addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, potenzirt, radicirt, logarithmirt werden. Die höhere Zahlenlehre gründet sich dann auf den Satz, daß aus einer Gleichung wieder eine Gleichung entsteht, wenn man die beyden Zahlzeichen (Seiten der Gleichung) mit einem dritten Zahlzeichen durch dieselben Operationen verbindet. Andre als sogenannte absolute ganze Zahlen giebt es nicht; andre können daher auch nicht in der Zahlenlehre betrachtet

werden. Der Umstand aber, daß wir eigentlich es bloß mit Zahlzeichen zu thun haben, bewirkt, daß auch Zahlzeichen entstehen, namentlich Differenzen, Quotienten, Wurzeln, Logarithmen, die keine Zahlen bezeichnen, sondern nur die Form der angeführten Zahlzeichen haben. Da die Allgemeinheit der Untersuchungen die Betrachtung bestimmter Zahlen gar nicht verstattet, so müssen wir Zahlzeichen allgemein behandeln, ohne uns darum zu bekümmern, ob sie in der Anwendung auf bestimmte Zahlen, wirklich Zahlen bezeichnen oder nicht, wenn wir nur der Ansicht zu Folge mit Gewißheit behaupten können, daß die Resultate in jedem Falle richtig seyn müssen. Daher die Entstehung der sogenannten negativen, gebrochenen, irrationalen (radikativen und logarithmischen) Zahlen. Sie bedürfen keiner weitern Lehre.

Die Einfachheit des Ganzen, die daraus hervorgeht, ist überraschend, und nur auf diesem Wege wird die Arithmetik und Algebra zu einer Wissenschaft, nur auf diesem Wege sind die Schwierigkeiten gelößt und die Streitigkeiten gehoben, die bisher so häufig statt fanden. Die Anschaulichkeit, Klarheit und Deutlichkeit aller einzelnen Lehren, besonders der angewandten, ist so groß, daß hierüber gar nichts mehr zu wünschen zu seyn scheint. Die überraschenden Fortschritte bey meinem Unterrichte verdanke ich einzig und allein dieser meiner Ansicht, die wegen ihrer Einfachheit und wegen der Leichtigkeit mit der deswegen der Schüler die ganze Wissenschaft übersehen kann, einem jeden hohe Liebe zu selbiger einflößt. Die nähere Auseinandersetzung findet man in meiner Elementarzahlenlehre. Erlangen 1816.

In meiner Arithmetik giebt es natürlich

keine Proportionen, sondern nur Gleichungen zwischen zwey Quotienten; keine Lehre der Proportionen, sondern bloß eine allgemeine Lehre der Gleichungen. Hat man daher die Gleichung zwischen zwey Quotienten

1) $a : b = c : d$

und multiplicirt, dividirt, addirt, subtrahirt, potenzirt, radicirt man auf beyden Seiten, so erhält man nach und nach:

2) $a . d = b . c$
3) $b : a = d : c$
4) $a : c = b : d$
5) $c : a = d : b$
6) $a \pm b : b = c \pm d : d$
7) $b \mp a : a = d \mp c : d$
8) $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$
9) $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$
10) $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$
11) $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$
12) $a \pm c : b \pm d = a : b = c : d.$

Und wenn eine dieser und der unendlich vielen andern ähnlichen Gleichungen, die sich aus 1) ableiten lassen, gegeben ist, so kann man aus ihr immer wieder die 1) und mit ihr alle übrigen ableiten.

Hat man:

1) $a : b = c : d$
2) $f : g = h : k$
3) $m : n = p : q$ so erhält man durch Multiplikation dieser Gleichungen und durch Division
4) $a.f.m : b.g.n = c.h.p : d.k.q$
5) $af : bg = ch : dk$
6) $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}.$

Und wenn $b = f$, $g = m$ ist, auch: $a : n = c.h.p : d.k.q.$

Hat man $a : b = c : d = f : g = h : k$ etc. so erhält man noch durch wiederholte Anwendung von (No. 12.): $a + c + f + h + \ldots : b + d + g + k + \ldots = a : b = c : d =$ etc. etc. wo alle vorkommenden Buchstaben und die aus diesen zusammengesetzten Zeichen Zahlzeichen sind.

§. 84. I. Die Summe und die Differenz zweyer Raumgrößen hat auch die Summe und die Differenz ihrer Maaße zum Maaß; d. h. es ist $(A \pm B) :: M = (A :: M) \pm (B :: M)$ wo A, B, zwey Raumgrößen und M eine dritte gleichartige Raumgröße ist, die als gemeinschaftliches Gemäß genommen wird.

II. Sind A, B, C drey Raumgrößen, A durch B und B wieder durch C meßbar, so ist das Maaß von A durch C gleich dem Produkt der Maaße von A durch B und B durch C gemessen; d. h. es ist $A :: C = (A :: B) . (B :: C)$

§. 85. Hieraus gehet unmittelbar hervor:

1) Es ist auch $A :: B = \frac{A :: C}{B :: C}$ oder $= (A :: C) : (B :: C)$

2) $B :: C = \frac{A :: C}{A :: B} = (A :: C) : (A :: B)$

3) Congruente Raumgrößen durch dasselbe Gemäß gemessen, geben gleiche Maaße.

4) Zwey beliebige Raumgrößen A und B die durch ein Gemäß M gemessen, gleiche Maaße geben, geben auch gleiche Maaße, wenn sie durch eine anderes Gemäß N gemessen werden, sobald nur N selber wieder ein Gemäß von M ist (folgt unmittelbar aus II); der Satz gilt auch umgekehrt nach (No. 1).

5) Zwey beliebige Raumgrößen, die gleiche Maaße geben, wenn sie durch ein Gemäß M gemessen werden, geben auch gleiche Maaße, so-

bald sie durch ein beliebiges anderes Gemäß N gemessen werden, auch wenn N kein Gemäß von M ist; denn es sey P das gemeinschaftliche Gemäß von M und von N, so ist nach vorhergehender Nummer A::P = B::P daher auch A::N = B::N nach derselben Nummer umgekehrten Satz.

6) Gleiche Raumgrößen, durch dasselbe Gemäß gemessen, geben gleiche Maaße; denn da gleiche Raumgrößen aus denselben congruenten Raumgrößen bestehen, und es auf jeden Fall ein Gemäß M geben muß, womit alle diese congruenten Raumgrößen gemessen werden können, so werden die gleichen Raumgrößen, durch dasselbe Gemäß gemessen, nach (No. 3 und §. 84. I.) nothwendig gleiche Maaße geben müssen. Dann müssen sie aber (nach 5) auch gleiche Maaße geben, wenn sie durch ein anderes beliebiges Gemäß N gemessen werden.

7) Eine größere Raumgröße giebt auch ein größeres Maaß, beyde durch dasselbe Gemäß gemessen.

8) Raumgrößen die gleiche Maaße geben, sind einander gleich, und eine Raumgröße ist größer als eine andere, wenn sie ein größeres Maaß giebt (immer unter der Voraussetzung, daß mit demselben übrigens beliebigen Gemäß gemessen wird).

9) Sind A und B zwey beliebige Raumgrößen und M und N zwey beliebige Gemäße derselben, so ist immer $\frac{A::M}{B::M} = \frac{A::N}{B::N}$; denn es sey das gemeinschaftliche Gemäß von M und von N durch P bezeichnet, so ist $A::M = \frac{A::P}{M::P}$ $B::M = \frac{B::P}{M::P}$, $A::N = \frac{A::P}{N::P}$; und $B::N = \frac{B::P}{N::P}$, folglich ꝛc.

10) Sind A und B, desgleichen C und D gleichartige Raumgrößen und $A:B=C:D$, so drückt diese Proportion (§. 13.) nichts anders aus, als daß A und B durch eine bestimmte gleichartige Raumgröße X gemessen, dieselben Zahlen geben als C und D durch eine bestimmte Y gemessen, d. h. daß $A::X = C::Y$ und $B::X=D::Y$; folglich $\frac{A::X}{B::X} = \frac{C::Y}{D::Y}$, demnach auch nach (No. 9): $\frac{A::M}{B::M} = \frac{C::N}{D::N}$, wo M und N ganz beliebige Gemäße sind. — Haben also A zu B und C zu D gleiche Verhältnisse, so sind auch allemal die Quotienten der Maaße von A und von B durch ein beliebiges Gemäß M gemessen, und der Maaße von C und D ebenfalls durch ein beliebiges Gemäß N gemessen, einander gleich.

11) Umgekehrt; ist $\frac{A::M}{B::M} = \frac{C::N}{D::N}$, so ist auch $A:B=C:D$, wie man leicht einsieht, wenn man P und Q so annimmt, daß $P::M$ der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $A::M$, $B::M$ und $Q::N$ der größte gemeinschaftliche Theiler von $C::N$ und $D::N$ wird, und wenn man in beyden gleichen Quotienten die Dividenden und die Divisoren durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt. Da aus beyden der in den kleinsten, also in denselben Zahlen ausgedrückte Quotient sich ergeben muß, so erhält man: $\frac{A::M}{P::M} = \frac{C::N}{Q::N}$ und

$\frac{B::M}{P::M} = \frac{D::N}{Q::N}$ dahero $A::P = C::Q$ und $B::P = D::Q$ d. h. $A:B = C:D$. W. Z. E. W.

12) Die Proportion $A:B = C:D$ kann man daher auch als eine Gleichung zwischen zwey Quotienten ansehen, sobald man sich vorstellt, daß A, B, C, D nicht mehr Raumgrößen, sondern ihre Maaße (Zahlen) je zwey durch ein beliebiges Gemäß gemessen, bezeichnen. Dann kann man alle Sätze der Zahlenlehre auf diese Gleichung anwenden, namentlich alle Sätze (§. 83. Anmerk.) und man erhält aus ihr eine Menge neuer Gleichungen, welche Gleichungen auch sogleich wieder als Proportionen zwischen 4 Raumgrößen betrachtet werden können, sobald nur die zwey Glieder, die den Dividend und Divisor eines jeden dieser Quotienten ausmachen, wirklich gleichartige Raumgrößen sind, deren Maaße hier genommen werden müssen. In so fern kann man daher auch von dem Quotienten, dem Produkt, oder der Poten ꝛc. ꝛc. zweyer Raumgrößen sprechen, da man wohl einsieht, daß nie etwas anders darunter verstanden seyn kann, als der Quotient, das Produkt, die Potenz ꝛc. ihrer Maaße; und daß, wenn zwey Verhältnisse gleich sind, nicht die Quotienten ihrer Glieder, sondern die Quotienten der Maaße ihrer Glieder gleich seyn müssen.

Auf diese Weise hat man einen allgemeinen Weg, die in dem vorigen Theil der Geometrie rein vorgetragenen Sätze der Proportionen schnell und allgemein zu erhalten.

13) Wenn der Quotient der Maaße zweyer Raum-

größen, durch ein gemeinschaftliches Gemäß gemessen, dem Quotienten zweyer gegebenen Zahlen gleich ist, so verhalten sich diese Raumgrößen, wie die gegebenen Zahlen, und umgekehrt. (Ist als bloße Erklärung anzusehen.)

14) Sind R und r die Maaße zweyer Rechtecke, G und g die Maaße ihrer Grundlinien durch ein gemeinschaftliches Gemäß M gemessen, so wie H und h die Maaße der Höhen durch ein gemeinschaftliches Gemäß N gemessen, so ist allemal $R:r = G.H:g.h$ oder $\frac{R}{r} = \frac{G.H}{g.h}$ denn man denke sich noch ein Rechteck, welches die Grundlinie des ersten und die Höhe des zweyten hat, und dessen Maaß, durch dasselbe gemeinschaftliche Flächengemäß gemessen, womit auch die Maaße R und r bestimmt sind, durch P bezeichnet seyn mag, so ist

$R:P = H:h$ und

$P:r = G:g$ folglich, beyde Gleichungen mit einander multiplicirt:

$R:r = G.H:g.h$ d. h. Rechtecke verhalten sich wie die Produkte der Maaße ihrer Grundlinien und der ihrer Höhen.

15) Rechtwinkliche Parallelepipedä verhalten sich wie die Produkte der Maaße der 3 Kanten. (Wird auf ähnliche Weise wie der vorhergehende Satz erwiesen, nur muß man zwey Hülfsparallelepipedä annehmen, eines, welches zwey Kanten vom ersten und die 3te Kante vom andern und ein zweytes, welches eine Kante vom ersten und 2 Kanten vom zweyten hat. Es versteht sich, daß je ein Paar Kanten durch ein gemeinschaftliches Gemäß gemessen seyn müssen.

Anmerk. Man kann auch in allen Gleichungen die Buchstaben oder die Zeichen setzen, womit man

vorher die Raumgrößen selber und nicht ihre Maaße bezeichnet hat, da man weiß, daß, wo Multiplicationen, Divisionen, überhaupt arithmetische Operationen vorkommen, immer nur Zahlen es seyn können, mit denen diese Operationen vorgenommen werden sollen, so daß man doch immer mit Bestimmtheit weiß, daß die Buchstaben, wenn sie auch vorher die Raumgrößen selber bezeichnet haben, hier in diesen Gleichungen doch nichts anders als ihre Maaße vorstellen können.

Elementar-Geometrie.

Rechnender Theil.

II. Von der Maaßbestimmung der Flächen und Körper aus gegebenen Maaßen der Linien und von dem umgekehrten Verfahren.

§. 86.

Im Vorhergehenden waren alle Gemäße ganz beliebig. Nehmen wir aber eine beliebige Linie M als Liniengemäß, und das Quadrat M^q zum Flächengemäß, so wie den Würfel M^c zum Körpergemäß, so finden für diese zusammengehörigen Gemäße noch insbesondere folgende Sätze statt:

I. Das Maaß eines Rechtecks ist gleich dem Produkt der Maaße seiner beyden Seiten (Grundlinie und Höhe).

II. Das Maaß eines rechtwinklichen Parallelepipedum ist gleich dem Produkt der Maaße seiner drey Kanten.

Man darf nur M wirklich in I auf den beyden Seiten des Rechtecks abtragen, so entstehen lauter Quadrate M^q, so wie wenn man

in II M auf allen 3 Kanten abträgt und parallele Ebenen zieht, lauter solche Würfel Mc entstehen, deren Anzahl dann leicht, so wie hier angegeben, erkannt wird.

§. 87. Hieraus folgt denn, immer unter der Voraussetzung, daß die Linien alle durch M, die Flächen aber durch Mq, so wie die Körper durch Mc gemessen werden:

1) Das Maaß eines jeden Quadrats ist gleich der zweyten Potenz des Maaßes seiner Seite.
2) Das Maaß eines jeden Würfels oder Kubus ist gleich der dritten Potenz des Maaßes seiner Seite.
3) Das Maaß eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Produkte der Maaße seiner Grundlinie und seiner Höhe.
4) Das Maaß eines jeden Parallelepipedum, daher auch eines jeden Prisma und eines jeden Cylinders ist gleich dem Produkte der Maaße der Grundfläche und der Höhe.
5) Das Maaß eines jeden Dreyecks ist die Hälfte des Maaßes des Parallelogramms, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.
6) Das Maaß einer Pyramide oder eines Kegels ist gleich dem dritten Theil des Maaßes eines Prisma, das mit ihnen gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Anmerk. 1) Man kann alle diese Sätze durch Gleichungen ausdrücken und zwar bloß die Zeichen (Buchstaben) für die Maaße der Raumgrößen setzen, womit die Raumgrößen selber bezeichnet worden sind, da man schon weiß, daß hier nicht die Raumgrößen selber, sondern nur ihre Maaße stehen können, folglich keine Verwechslung zu befürchten ist.

Anmerk. 2) Die beyden letztern Nummern erfordern, daß, wenn sich die Dreyecke und die Pyramiden oder Kegel sollen wirklich durch Mq oder Mc messen lassen, das Maaß des Prisma durch 3, das des Parallelogramms aber durch zwey muß

(ohne Rest) dividirt werden können; im entgegengesetzten Falle ließen sich die Maaße in N zwar auf das Gemäß Mq oder Mc gar nicht angeben; und man müßte, wollte man dennoch die Maaß dieser letzten Größen bestimmen, eine andere Linie N die etwa der sechste oder ein ähnlicher Theil von M wäre, und dann dies Quadrat Nq und den Würfel Nc zum zusammengehörigen Gemäß annehmen. (§. 83.)

Anmerk. 3) Man sieht überhaupt, daß wenn die Maaße von Flächen und Körpern sich sollen angeben lassen, man zum Linien-Gemäß M eine solche Linie annehmen muß, mit welcher alle Linien, deren man zur Bestimmung der erstern bedarf, wirklich gemessen werden können. Eine solche Linie M ist allemal denkbar (man darf sie nur so klein nehmen, daß es keine kleinere mehr giebt, so wird es auch keinen Rest mehr geben) aber in der Ausübung nicht allemal anwendbar. In der Praxis muß man sich daher begnügen, eine solche Linie M zum Liniengemäß zu nehmen, welche wenigstens klein genug ist, daß die Reste, die sich noch ergeben sollten, als unbedeutend ausser Acht gelassen werden können. Wie klein sie seyn müsse, hängt dann immer von den jedesmaligen besondern Umständen und von der größern oder geringern Genauigkeit ab, die von der Maaßbestimmung verlangt wird.

Anmerk. 4) Sind M und N zwey Linien und $M = p.\ N$, also $M :: N = p$, so ist $Mq :: Nq = p^2$ und $Mc :: Nc = p^3$. Ist nun P ein rechtwinkliches Parallelepipedum, G, H, K die 3 Kanten, R ein Rechteck aus den beyden Kanten G und H, und dabey: $G :: N = a$, $H :: N = b$, $K :: N = c$, so ist

1) $R :: Nq = a.\ b$;

2) $P :: Nc = a.\ b.\ c.$

Aus 1. und 2. würde man nun auch erhalten nach (§. 85. No. 1.):

3) $R :: Mq = \frac{a.b}{p^2}$;

4) $P :: Mc = \frac{a\ b.c}{p^3}$.

Hätte man dagegen die Linien G, H, K durch das Gemäß M gemessen, so hätte man erhalten nach (§. 85. No. 1.): $G::M = \frac{a}{p}$; $H::M = \frac{b}{p}$; $K::M = \frac{c}{p}$ woraus wieder:

5) $R::Mq = \frac{a}{p} . \frac{b}{p}$;

6) $P::Mc = \frac{a}{p} . \frac{b}{p} . \frac{c}{p}$; da nun $\frac{a}{p} . \frac{b}{p} = \frac{a.b}{p^2}$ und $\frac{a}{p} . \frac{b}{p} . \frac{c}{p} = \frac{a.b.c}{p^3}$ ist, so erhellet, daß die Resultate 5. und 6. mit denen in 3. und 4. auf einem andern Weg erhaltenen völlig übereinstimmen, wie das nothwendig war.

Gesetzt nun die Linien G, H, K ließen sich gar nicht durch M messen; so ließen sich auch R und P nicht durch Mq und Mc messen. Die Gleichungen $G::M = \frac{a}{p}$, $H::M = \frac{b}{p}$, $K::M = \frac{c}{p}$ $R::Mq = \frac{a.b}{p^2}$, $P::Mc = \frac{a.b.c}{p^3}$ bezeichnen also dann gar nichts, da auch $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{p}$, $\frac{c}{p}$ rc. nichts (d. h. keine Zahlen) bezeichnen; aber sie geben doch unmittelbar nach (§. 84. II): $G::N = p . \frac{a}{p} = a$, $H::N = p . \frac{b}{p} = b$, $K::N = p . \frac{c}{p} = c$ $R::Nq = p^2 . \frac{a.b}{p^2} = a.b$ und $P::Nc = p.^3 \frac{a.b.c}{p^3} = a.b.c$ sobald man die Formeln für Quotienten allgemein gelten läßt, ohne sich darum zu bekümmern, ob diese wirklich Zahlen bezeichnen oder nicht; d. h.

ohnerachtet jene Gleichungen an sich nichts bedeuten, so führen sie doch unter der gemachten Voraussetzung zu diesen, die Bedeutung haben, und in so fern kann man jene Gleichungen beybehalten, auch wenn $\frac{a}{p}, \frac{b}{p}$ etc. $\frac{a.b}{p^2}, \frac{a.b.c}{p^3}$, keine Zahlen bezeichnen (keine ganzen Zahlen sind); in so fern kann man figürlich sagen, daß G durch M gemessen $\frac{a}{p}$ (a, p theil) gebe, und es drückt dieses nichts weiter aus, als daß G durch den pten Theil von M, nehmlich durch N gemessen die Zahl a giebt. *)

§. 88. Sind P, N, M, Linien und zwar $P = n. N$, $N = m. M$ so ist $Pq = n^2. Nq$, $Nq = m^2. Mq$ und $Pc = n^3. Nc$, $Nc = m^3. Mc$ wo n und m zwey beliebige (ganze) Zahlen sind.

Ist nun A eine Linie, B eine Fläche und C ein Körper, und hat man

1) $A = a\ P + b\ N + c\ M$
2) $B = a\ Pq + b\ Nq + c\ Mq$
3) $C = a\ Pc + b\ Nc + c\ Mc$, so erhält man sogleich:

$$A = (anm + bm + c)\ M = \frac{anm + bm + c}{m} N = \frac{anm + bm + c}{nm} P$$

$$B = (an^2m^2 + bm^2 + c)\ Mq = \frac{an^2m^2 + bm^2 + c}{m^2} Nq = \frac{an^2m^2 + bm^2 + c}{n^2m^2} Pq$$

*) Die Klarheit dieser Darstellung wird hoffentlich meine divisiven Formen rechtfertigen, und vielleicht einen jeden Leser überzeugen, daß man es auch in der Anwendung immer nur mit ganzen Zahlen zu thun habe.

$$C = (an^3m^3 + bm^3 + c)M^c = \frac{an^3m^3 + bm^3 + c}{m^3}$$

$$N^c = \frac{an^3m^3 + bm^3 + c}{n^3m^3} P^c \text{ folglich}$$

4) $A :: M = anm + bm + c$

5) $A :: N = \frac{anm + bm + c}{m} = an + b + \frac{c}{m}$

6) $A :: P = \frac{anm + bm + c}{n.m} = a + \frac{b}{m} + \frac{c}{nm}$

7) $B :: Mq = an^2m^2 + bm^2 + c$

8) $B :: Nq = \frac{an^2m^2 + bm^2 + c}{m^2} = an^2 + b + \frac{c}{m^2}$

9) $B :: Pq = \frac{an^2m^2 + bm^2 + c}{n^2m^2} = a + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^2m^2}$

10) $C :: M^c = an^3m^3 + bm^3 + c$

11) $C :: N^c = \frac{an^3m^3 + bm^3 + c}{m^3} = an^3 + b + \frac{c}{m^3}$

12) $C :: P^c = \frac{an^3m^3 + bm^3 + c}{n^3m^3} = a + \frac{b}{n^3} + \frac{c}{n^3m^3}$

Nach diesen Formeln findet man das Maaß von A, B, C, in Bezug auf jedes Gemäß, sobald die Zahlen a, b, c gegeben sind, d. h. sobald man weiß, wie viel mal sich auf der Linie A die größte Linie P, dann auf dem Rest die nächste Linie N, und auf den noch bleibenden Rest die kleinste Linie M abtragen läßt u. s. w. Deswegen nennt man auch oft die Zahlen a, b, c, selber das Maaß von A oder von B oder von C, in so fern sich nehmlich aus ihnen das Maas wirklich finden läßt. Die Linien P, N, M in Verbindung nennt man dann ein zusammengesetztes Liniengemäß, so wie die Quadrate Pq, Nq, Mq, und die Würfel P^c, N^c, M^c, in Ver-

bindung die zugehörigen zusammengesetzten Flächen- und Körpergemäße genannt werden.

§. 89. Umgekehrt: Hat man $A :: M = s$
$B :: Mq = s'$ und $C :: Mq = s''$ und ist dabey
$s = mq + r$, $q = nh + k$ also $s = mnh + mk + r$
$s' = m^2q' + r'$, $q' = n^2h' + k'$ also $s' = m^2n^2h'$
$+ m^2k' + r'$
$s'' = m^3q'' + r''$, $q'' = n^3h'' + k''$ also $s'' = m^3$
$n^3h'' + m^3k'' + r''$; so hat man

1) $A = h\ P + k\ N + r\ M$
2) $B = h'\ P + k'\ N + r'\ M$
3) $C = h''\ P + k''\ N + r''\ M$ und da man q und r erhält, wenn man s durch m dividirt, und h und k erhält, wenn man q durch n dividirt, (wo immer die eine Zahl als Quotient, die andere als Rest sich ergiebt); da man ferner h', k', r', und h'', k'', r'' durch eine ähnliche Division mit m^2, n^2 und m^3, n^3 erhält, so ist leicht einzusehen, wie man aus den Maaßen s, s', s'', die zusammengesetzten Maaße 1) 2) 3) erhalten kann.

Anmerk. 1) Man sieht leicht ein, wie ein solches zusammengesetztes Gemäß aus 2, 3, 4 und mehr Theilen bestehen kann, und wie die Formeln für einen andern Fall sich abändern werden. Man kann auch den größten dieser Theile den Grundtheil, die folgenden Theile aber nach der Ordnung die ersten, zweyten, dritten rc. abgeleiteten Theile des Gemäßes nennen; aber man muß nicht übersehen, daß zur Bestimmung der Maaße aus andern, nur ein einfaches Gemäß, und daß ein zusammengesetztes Gemäß nur zur Angabe der Maaße gebraucht werden kann, um bey dieser Angabe die zu großen Zahlen zu vermeiden, auch um das Verfahren des unmittelbaren Messens zu erleichtern, und daraus in anderer Hinsicht Bequemlichkeit zu erhalten.

Anmerk. 2) In der Anwendung auf das bürgerliche Leben pflegt man gewöhnlich eine Länge Ruthe genannt zum Grundtheil anzunehmen, solchen in 10 oder 12 erste Theile (Fuße) diesen

wieder in 10 oder 12 zweyte Theile (Zolle) u. s. f. zu theilen, so daß das Liniengemäß aus Ruthe, Fuß, Zoll, Linie u. s. w., das Flächengemäß aber aus Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll, Quadratlinie rc. so wie das zugehörige Körpergemäß aus Kubikruthe, Kubikfuß, Kubikzoll, Kubiklinie rc besteht *)

§. 90. Winkel müssen durch Winkel und Kreisbogen durch Kreisbogen gemessen werden und es findet daher für die hier entstehenden Maaße statt, was überhaupt von den Maaßen und insbesondere von den Maaßen der geraden Linien gilt.

Anmerk. Gewöhnlich nimmt man den flachen Winkel zum Grundtheil des Winkelgemäßes an, und theilt solchen in 180 erste Theile (Grade), diesen kleinen Winkel (Grad) wieder in 60 zweyte Theile (Minuten), diese wieder in 60 Sekunden u. s. w. Die Decimaleintheilung kann auch noch bemerkt werden.

§. 91. Ohnerachtet sich ein Kreisbogen nur durch einen Kreisbogen messen läßt, so kann man es doch versuchen, ihn auch durch eine gerade Linie zu messen, in so fern man sich die krumme Linie in eine gerade ausgestreckt denken kann. Dazu kann man durch folgende Betrachtungen gelangen:

1) Die Summe aller Seiten eines regulären Vielecks (der Umfang des Vielecks) ist eine gerade Linie, und läßt sich daher durch eine andere gerade Linie messen.

2) Ein in dem Kreis beschriebenes Vieleck nähert sich der Kreislinie desto mehr, je mehr es Seiten hat; und so wie man die Zahl der Seiten eines solchen regulären Vielecks durch Verdoppelung desselben nach Willkühr vermehren kann, ohne je die äusserste Grenze der Vermehrung zu erreichen, so kann man sich auch nach Willkühr der Kreislinie nähern, ohne sie je gänzlich zu erreichen.

---

*) Das nähere über diese Anwendung muß dem mündlichen Vortrag überlassen bleiben.

Indem man auf diese Weise den Umfang eines Vielecks von sehr vielen Seiten berechnete, fand man für die Kreislinie p deren Radius r ist, folgendes Resultat: wenn man nehmlich den Halbmesser r in 1000000000000000000000000000000 gleiche Theile theilt, und einen solchen Theil $= \mu$ setzt, so ist:

$\frac{1}{2} p :: \mu = 3141592653589793238462643383279$

woraus:

$\frac{1}{2} p :: r = 3{,}141592653589793238462643383279$

welches Maaß für alle Kreislinien, die durch ihren Halbmesser gemessen werden, dasselbe bleibt, und welches ich künftig immer durch π bezeichnen werde.

Anmerk. 1) In den meisten Fällen der Anwendung kann man sich immer begnügen $\pi = 3{,}14159$ zu setzen. Daß man früher den flachen Winkel durch denselben Buchstaben π bezeichnete, wird keine Verwechslung befürchten lassen da man jedesmal immer leicht sehen wird, ob von einem Winkel oder von einer Zahl die Rede ist.

Anmerk. 2) Die Gleichung $\frac{1}{2} p :: r = 3{,}14159$ drückt eigentlich aus, daß der Halbmesser r zuerst 3mal, dann sein zehnter Theil 1mal, dann der 100ste Theil des Halbmessers noch 4mal, ferner der 1000ste Theil von r noch 1mal, dann der 10000ste Theil von r noch 5mal rc. auf der halben Kreislinie abgetragen werden könne.

§. 92. Nimmt man nun die Sätze der Gleichheit der Flächen und der Körper aus dem reinen Theil, und den Satz zu Hülfe, daß gleiche Flächen auch gleiche Maaße haben, so wird man sehr leicht aus dem bisher aufgestellten, das Maaß einer Kreisfläche, einer jeden andern durch gerade Linien oder Kreislinien begrenzten Fläche, eines jeden durch ebene oder durch vom Kreise abhängende Flächen begrenzten Körpers aus den Maaßen der sie bestimmenden Linien ableiten können, so daß wir hier noch etwas hinzuzufügen nicht für nöthig erachten.

Elementar-Geometrie.

Rechnender Theil.

III. Algebraische Geometrie.

§. 93.

Diese Abtheilung hat folgende Forderungen zu befriedigen:

1) Sie hat in gegebenen Raumsystemen aus den gegebenen Maaßen von Linien (zuweilen auch von Flächen oder von Körpern) die Maaße anderer Linien (Flächen oder Körper) die auf irgend eine gegebene Weise von ersteren abhängen sollen, zu finden.

2) Da durch die Maaße und Gemäße die Linien selbst gegeben sind, so hat diese Abtheilung auch noch zu zeigen, wie aus gegebenen Linien andere Linien des Raumsystems mittelst Berechnung ihrer Maaße construirt werden können.

Die erste Aufgabe bedarf bloß einer Kenntniß der Raumgrößen, wie solche in dem rein-geometrischen Theil gelehrt worden, und die Kenntniß des allgemeinen Weges, wie in der Algebra sogenannte algebraische Aufgaben gelößt werden,

um ihre Auflösung in jedem besondern Falle unmittelbar angeben zu können.

Die zweyte erfordert eine Anzahl von Elementarsätzen in Bezug auf Linien, die dem Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren ꝛc. ihrer Maaße entspricht, um den Operationen, die mit den Maaßen vorgenommen werden sollen, durch Construktionen der Linien entsprechen zu können.

Da diese ganze Abtheilung einer noch weit allgemeinern Behandlung fähig ist, wie ich schon (§. 4.) bemerkt habe, und da ich diese Behandlung in einem eigenen ähnlichen Werkchen auseinander zu setzen Willens bin, so begnüge ich mich hier mit der Angabe des Gegenstandes, und gehe über zu der Elementar-Geometrie rechnenden Theil, Trigonometrie.

Elementar-Geometrie.

Rechnender Theil.

IV. Trigonometrie.

§. 94.

Nachdem wir nehmlich in der ersten Abtheilung von den Maaßen im allgemeinen, in der zweyten und dritten Abtheilung von der Bestimmung der Maaße aus gegebenen Maaßen insbesondere gehandelt, in keinem dieser letzten Fälle aber Maaße der Winkel mit Maaßen der Linien in Verbindung gebracht haben, muß man auch noch den Fall betrachten, wo in einem Raumsystem aus gegebenen Stücken oder vielmehr aus ihren Maaßen andre Stücke oder vielmehr ihre Maaße gesucht werden, und zwar indem entweder unter den gegebenen Stücken oder unter den gesuchten nicht bloß Linien oder Winkel allein, sondern beyde in Verbindung vorkommen. Es bedarf nehmlich hier nicht einer bloßen Anwendung der Algebra, sondern noch einer eigenen Betrachtung, um auch die Winkel mit in Rechnung bringen zu können. Dieses Mittel ist im wesentlichen folgendes. Statt nehmlich das Maaß eines Winkels A selber in Rechnung zu bringen, nimmt

man immer die Quotienten zweyer Seiten eines rechtwinklichen Dreyecks, welches diesen Winkel A hat, und bringt einen dieser Quotienten in Rechnung, was immer möglich ist, da diese Quotienten alle nur einzig und allein von dem Winkel A abhängen, also mit ihm zugleich gegeben sind. Das folgende wird dies nun deutlicher auseinander setzen.

§. 95. Wenn man in einem Winkel MAN mehrere senkrechte Linien BC, DE, FG zieht, so entstehen rechtwinkliche Dreyecke, die alle einander ähnlich und in denen daher alle Seiten proportionirt sind, d. h. je zwey Seiten gleiche Verhältnisse haben. Da aber, wenn Verhältnisse gleich sind, auch die Quotienten gleich sind, die entstehen, wenn beyde Glieder eines jeden Verhältnisses durch eine dritte Größe gemessen und die Maaße durch einander dividirt werden, so ist je zweyer Seiten Quotient im Dreyeck ABC derselbe, wie der Quotient der beyden ähnlich liegenden Seiten im Dreyeck ADE und im Dreyeck AFG überhaupt in jedem beliebigen rechtwinklichen Dreyeck, welches denselben Winkel A hat.

§. 96. In einem solchen Dreyeck ABC hängen also die Quotienten je zweyer Seiten nehmlich $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AB}{BC}$, $\frac{BC}{AC}$, $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AC}{AB}$, und $\frac{AB}{AC}$ nur von dem Winkel A ab und kennt man diese Quotienten in einem Dreyeck ABC, so kennt man zugleich die Quotienten je zweyer Seiten in jedem andern rechtwinklichen Dreyeck, welches denselben Winkel A hat, (weil sie völlig dieselben sind, wie in dem erstern Dreyeck ABC).

§. 97. Es ist bekanntlich: (Elementarzahlenlehre II. Kap.)

1) $\frac{BC}{AC} = 1 : \frac{AC}{BC}$ und $\frac{AC}{BC} = 1 : \frac{BC}{AC}$

2) $\frac{BC}{AB} = 1 : \frac{AC}{BC}$ und $\frac{AB}{BC} = 1 : \frac{BC}{AB}$

3) $\frac{AB}{AC} = 1 : \frac{AC}{AB}$ und $\frac{AC}{AB} = 1 : \frac{AB}{AC}$

4) $\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

5) $\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB}$ und $\frac{AC}{BC} = \frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB}$

6) $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$ und $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = 1 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$.

Ueberhaupt läßt sich mit Zuziehung von (No. 4) jeder der 6 Quotienten finden, sobald einer gegeben ist. Dies giebt in allem 30 Gleichungen, die hier der Kürze wegen weggelassen sind, weil sie die Schüler leicht selbst entwickeln können. Auch ist leicht einzusehen, wie man noch mehrere obigen 6 Nummern ähnliche Gleichungen aufstelle.

§. 98. In so fern aber das von den 6 Quotienten, $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$, $\frac{AC}{BC}$ aufgestellte, nicht bloß für die Quotienten dieser Linien AB, AC, BC gilt, sondern überhaupt jeder Quotient zweyer ähnlich liegender Seiten in den unzählichen rechtwinklichen Dreyecken die denselben Winkel A haben, statt eines von diesen gesetzt werden kann, so ist es bequemer, diese Quotienten allgemeiner zu bezeichnen, und da sie bloß von dem Winkel A abhängen, so bezeichnet man sie in der Reihe durch Sinus, Cosecante Cosinus, Secante, Tangente, Cotangente des Winkels A oder durch die Zeichen Sin. A, Cosec. A,

Cos. A, Sec. A, Tg. A, Cotg. A, so daß z. B. Tg. A den Quotienten $\frac{BC}{AC}$ oder jeden andern Quotienten zweyer ähnlich liegenden Seiten in allen übrigen rechtwinklichen Dreyecken die den Winkel A haben, z. B. $\frac{DE}{AE}$, $\frac{FG}{AG}$ u. s. w. bezeichnet. Die Nummern des vorhergehenden Paragraphen bekommen dann folgende Gestalt:

1) $\text{Tg. A} = \frac{1}{\text{Cotg. A}}$, $\text{Cotg. A} = \frac{1}{\text{Tg. A}}$

2) $\text{Sin. A} = \frac{1}{\text{Cosec. A}}$, $\text{Cosec. A} = \frac{1}{\text{Sin. A}}$

3) $\text{Sec. A} = \frac{1}{\text{Cos. A}}$, $\text{Cos. A} = \frac{1}{\text{Sec. A}}$

4) $\text{Sin. A}^2 + \text{Cos. A}^2 = 1$.

5) $\text{Tg. A} = \frac{\text{Sin. A}}{\text{Cos. A}}$, $\text{Cotg. A} = \frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$

6) $\text{Sec. A}^2 = 1 + \text{Tg. A}^2$, $\text{Cosec. A}^2 = 1 + \text{Cotg. A}^2$.

§. 99. Denkt man sich die Linien BA, BC nach P, Q verlängert und noch die senkrechten Linien IK, LO etc. gezogen, so entstehen wieder rechtwinkliche Dreyecke zwischen den Schenkeln des Winkels B, die alle dem Dreyeck ABC und folglich auch den übrigen Dreyecken zwischen den Schenkeln des Winkels A ähnlich sind. In diesen Dreyecken, kann man sagen, hängen die Quotienten der Seiten eben so von dem Winkel B ab, wie in den vorigen von dem Winkel A; folglich müssen die 6 Quotienten $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AC}{BC}$, $\frac{BC}{AC}$ in so fern sie bloß von dem Winkel B abhängen, bezeichnet werden durch Sin.

B, Cosec. B, Cos. B, Sec. B, Tg. B, Cotg. B. Dieselben Quotienten sind aber vorhin schon bezeichnet worden, in so fern sie von dem Winkel A abhängen, der Reihe nach durch: Cos. A, Sec. A, Sin. A, Cosec. A, Cotg. A., Tg. A und es ist daher: Sin. B = Cos. A, Sec. B = Cosec. A, Tg. B = Cotg. A. Sin. A = Cos. B, Sec. A = Cosec. B, Tg. A = Cotg. B, welche Gleichungen nichts anders ausdrücken, als daß beyde Zeichen zur linken und zur rechten des Gleichheitszeichen einen und denselben Quotienten bezeichnen. Da A + B = einem rechten Winkel, übrigens A und B ganz willkührlich sind, so gilt dies natürlich von je zwey Winkeln, die zusammen einen rechten Winkel ausmachen, und von denen man den einen den Ergänzungswinkel (Complement) des andern nennt.

Fig. 21. Anmerk. 1) Denkt man sich die Figur (21) so gebildet, daß alle Linien auf die senkrechten Radien AE, AF senkrecht gezogen sind, so ist im Dreyeck ABC, wenn der Radius der Kreislinie = 1 und der Winkel A = x gesetzt wird:

$$\text{Sin } x = \frac{BC}{BA} = \frac{BC}{1} = BC$$

$$\text{Cos. } x = \frac{AC}{BA} = \frac{AC}{1} = AC$$

$$\text{Tg. } x = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{1} = \frac{DE}{1}$$

$$\text{Cotg. } x = \frac{AC}{BC} = \frac{DH}{AH} = \frac{FG}{AF} = \frac{FG}{1} = FG$$

$$\text{Sec. } x = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{1} = AD$$

$$\text{Cosec. } x = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AH} = \frac{AG}{AF} = \frac{AG}{1} = AG$$

wobey man aber nicht vergessen darf, daß der Radius = 1 seyn, d. h. daß der Radius das gemeinschaftliche Gemäß seyn muß, womit alle Linien gemessen werden. Da durch den Winkel und den Radius auch der Bogen gegeben ist, so kann man

eben so gut für x den Bogen BE setzen, dessen Radius = 1, indem man dadurch nichts anders verstehen kann, als daß man den Centri-Winkel meine, dessen Bogen = x ist. Diese Art gedachte Quotienten als Linien anschaulich zu machen, hat zuweilen ihre Vortheile, in so fern durch die Anschauung die Uebersicht der Begriffe erleichtert wird.

Anmerk. 2) Man sieht sogleich, wie man sich dieser Quotienten bedienen könne, um Winkel in Rechnung zu bringen; da jene bloß von den Winkeln abhängen, und für jeden Winkel immer dieselben bleibend, ein für allemal berechnet und in eine Tabelle geordnet werden können. Dann ist mittelst der Tabelle (die man auch Sinustafel nennt) der Winkel bekannt, sobald ein solcher Quotient bekannt ist und umgekehrt. (Es versteht sich, daß in den Tabellen der Winkel nicht selbst, sondern nur das Maaß desselben durch den flachen Winkel als das bekannte Winkel-Gemäß gemessen, vorkommen kann). Auch den Flächenwinkel kann man auf diese Art in Rechnung bringen, weil der Flächenwinkel durch seinen correspondirenden Linienwinkel (Neigungswinkel) bestimmt ist. Man nennt gewöhnlich den Theil der Mathematik, der diese Quotienten, durch welche Winkel in Rechnung gebracht werden können, ausschließend behandelt, Trigonometrie. In den Elementen beschränkt man sich meistens auf eine einzige Aufgabe, nehmlich: „Aus drey Stücken eines ebenen oder körperlichen Dreyecks, durch welche das Dreyeck selbst bestimmt ist, die übrigen 3 Stücke zu finden.“ Im Falle man nun ebene Drecke und folglich auch ebene Vielecke betrachtet, nennt man sie die ebene Trigonometrie; in Bezug aber auf körperliche Dreyecke oder körperliche Vielecke nennt man sie die sphärische Trigonometrie. Im wesentlichen unterscheiden sich beyde nicht von einander. Die ganze Wissenschaft besteht hauptsächlich in der Vergleichung der Hülfsquotienten, die man auch trigonometrische Linien nennt. (Anmerk. 1.)

§. 100. Die Hauptsache wird seyn, die trigonometrischen Linien für Summen oder Differenzen von Winkeln, aus denen der einfachen Win-

kel (Summenden, Minuenden, Subtrahenden) abzuleiten; und da findet man folgende 4 Hauptformeln:

I. $\text{Sin}\ (x+y) = \text{Sin}\ x.\ \text{Cos}\ y + \text{Cos}\ x.\ \text{Sin}\ y$

II. $\text{Cos}\ (x+y) = \text{Cos}\ x.\ \text{Cos}\ y - \text{Sin}\ x.\ \text{Sin}\ y$

III. $\text{Sin}\ (x-y) = \text{Sin}\ x.\ \text{Cos}\ y - \text{Cos}\ x.\ \text{Sin}\ y$

IV. $\text{Cos}\ (x-y) = \text{Cos}\ x.\ \text{Cos}\ y + \text{Sin}\ x.\ \text{Sin}\ y$

die in so fern vorzüglich zu bemerken sind, als aus ihnen alle übrigen abzuleiten seyn müssen.

Um sie zu beweisen, muß man die Summen oder Differenzen der Winkel construiren, in ihnen, so wie in den einzelnen Winkeln x und y, beliebige senkrechte Linien aber doch so ziehen, 1) daß die Quotienten alle hergestellt, 2) aber auch so hergestellt werden können, daß die Produkte zweyer dieser Quotienten, z. B. Sin x. Cos y oder Cos x. Cos y etc. die in obigen Formeln vorkommen, vermöge eines gemeinschaftlichen Divisors und Dividenden in den beyden Faktoren einen einzigen Quotienten geben. Dann folgt das übrige sogleich.

§. 101. Nimmt man Minuend und Subtrahend einander gleich, so erhält man aus II. und IV.

1) $\text{Sin}\ 0 = 0$,

2) $\text{Cos}\ 0 = 1$

desgleichen ergiebt sich

3) $\text{Sin}\ \frac{1}{2}\pi = 1$

4) $\text{Cos.}\ \frac{1}{2}\pi = 0$

(wo π entweder den flachen Winkel, oder den Halbkreis bezeichnet, dessen Halbmesser $= 1$) indem man in I und III $x = y = \frac{1}{4}\pi$ setzt und bemerkt, daß wegen der gleichen Katheten in dem

Dreyeck, das den Winkel $\frac{1}{4}\pi$ hat, $\text{Sin}\ \frac{1}{4}\pi = \text{Cos}$ $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

Durch wiederholte Anwendung der Formeln (§. 100) folgt nun:

5) $\text{Sin}\ \pi = 0$
6) $\text{Cos}\ \pi = -1$
7) $\text{Sin}\ \frac{3}{2}\pi = -1$
8) $\text{Cos}\ \frac{3}{2}\pi = 0$
9) $\text{Sin}\ 2\pi = 0$
10) $\text{Cos}\ 2\pi = 1$
3*) $\text{Sin}\ \frac{4n+1}{2}\pi = 1$
4*) $\text{Cos}\ \frac{4n+1}{2}\pi = 0$
5*) $\text{Sin}\ (2n+1)\pi = 0$
6*) $\text{Cos}\ (2n+1)\pi = -1$
7*) $\text{Sin}\ \frac{4n+3}{2}\pi = -1$
8*) $\text{Cos}\ \frac{4n+3}{2}\pi = 0$
9*) $\text{Sin}\ 2n\pi = 0$
10*) $\text{Cos}\ 2n\pi = 1$

Ferner folgt nun aus denselben Formeln

11) $\text{Sin}\ (\pi+x) = -\text{Sin}\ x$
12) $\text{Cos}\ (\pi+x) = -\text{Cos}\ x$
13) $\text{Sin}\ (2\pi+x) = \text{Sin}\ x$
14) $\text{Cos}\ (2\pi+x) = \text{Cos}\ x$
15) $\text{Sin}\ ((2n+1)\pi+x) = -\text{Sin}\ x$
16) $\text{Cos}\ ((2n+1)\pi+x) = -\text{Cos}\ x$
17) $\text{Sin}\ (2n\pi+x) = \text{Sin}\ x$
18) $\text{Cos}\ (2n\pi+x) = \text{Cos}\ x$
19) $\text{Sin}\ (\frac{1}{2}\pi+x) = \text{Cos}\ x$
20) $\text{Cos}\ (\frac{1}{2}\pi+x) = -\text{Sin}\ x$
21) $\text{Sin}\ (\frac{3}{2}\pi+x) = -\text{Cos}\ x$
22) $\text{Cos}\ (\frac{3}{2}\pi+x) = \text{Sin}\ x$

23) $\text{Sin}\,\left(\frac{4n+1}{2}\pi + x\right) + \text{Cos}\,x$

24) $\text{Cos}\,\left(\frac{4n+1}{2}\pi + x\right) = -\text{Sin}\,x$

25) $\text{Sin}\,\left(\frac{4n+3}{2}\pi + x\right) = -\text{Cos}\,x$

26) $\text{Cos}\,\left(\frac{4n+3}{2}\pi + x\right) = \text{Sin}\,x$

27) $\text{Sin}\,(\pi - x) = \text{Sin}\,x$

28) $\text{Cos}\,(\pi - x) = -\text{Cos}\,x$

29) $\text{Sin}\,(2\pi - x) = -\text{Sin}\,x$

30) $\text{Cos}\,(2\pi - x) = \text{Cos}\,x$

31) $\text{Sin}\,((2n+1)\pi - x) = \text{Sin}\,x$

32) $\text{Cos}\,((2n+1)\pi - x) = -\text{Cos}\,x$

33) $\text{Sin}\,(2n\pi - x) = -\text{Sin}\,x$

34) $\text{Cos}\,(2n\pi - x) = \text{Cos}\,x$

35) $\text{Sin}\,(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \text{Cos}\,x$

36) $\text{Cos}\,(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \text{Sin}\,x$

37) $\text{Sin}\,(\tfrac{3}{2}\pi - x) = -\text{Cos}\,x$

38) $\text{Cos}\,(\tfrac{3}{2}\pi - x) = -\text{Sin}\,x$

39) $\text{Sin}\,\left(\frac{4n+1}{2}\pi - x\right) = \text{Cos}\,x$

40) $\text{Cos}\,\left(\frac{4n+1}{2}\pi - x\right) = \text{Sin}\,x$

41) $\text{Sin}\,\left(\frac{4n+3}{2}\pi - x\right) = -\text{Cos}\,x$

42) $\text{Cos}\,\left(\frac{4n+3}{2}\pi - x\right) = -\text{Sin}\,x$

und was hier für Sinus und Cosinus entwikkelt ist, läßt sich sehr auf die übrigen trigonometrischen Linien als Tangente, Sekante ꝛc. erweitern, in so fern aus Sinus und Cosinus alle übrigen gefunden werden können (§. 97).

Anmerk. Zu bemerken ist hier noch, daß $\pi - x$ und x immer zwey Nebenwinkel sind, daß also

noch 27) und 28) Nebenwinkel einerley Sinus, eben so gleiche, aber entgegengesetzten Cosinus, folglich nach §. 98 auch gleiche und entgegengesetzte Tangenten, Cotangenten, Sekanten, dagegen einerley Cosekanten haben. Desgleichen sind $\frac{1}{2}\pi - x$ und x immer Ergänzungswinkel; folglich lehren 35) und 36) nichts anders als was (§. 99) schon bekannt war.

Auch bemerke man zugleich, daß: $Tg\ \frac{1}{2}\pi = Cotg\ 0 = 1$, u. Tg, Sec, Cotg, Cosec unendlich werden die beyden ersten wenn der Cosinus, die beyden andern wenn der Sinus = o ist (§. 98.)

§. 102. Nicht minder folgt aus (§. 100.)

1) $\mathrm{Sin}\ 2x = 2\ \mathrm{Sin}\ x.\ \mathrm{Cos}\ x$

2) $\mathrm{Cos}\ 2x = \mathrm{Cos}\ x^2 - \mathrm{Sin}\ x^2$

3) $\mathrm{Cos}\ 2x = 1 - 2\ \mathrm{Sin}\ x^2$

4) $\mathrm{Cos}\ 2x = 2\ \mathrm{Cos}\ x^2 - 1$

5) $\mathrm{Sin}\ x = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{Cos}\ 2x}{2}}$

6) $\mathrm{Cos}\ x = \sqrt{\frac{1 + \mathrm{Cos}\ 2x}{2}}$

7) $\mathrm{Sin}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y = \frac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x+y) + \frac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x-y)$

8) $\mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Sin}\ y = \frac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x+y) - \frac{1}{2}\ \mathrm{Sin}\ (x-y)$

9) $\mathrm{Cos}\ x.\ \mathrm{Cos}\ y = \frac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x-y) + \frac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x+y)$

10) $\mathrm{Sin}\ x.\ \mathrm{Sin}\ y = \frac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x-y) - \frac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ (x+y)$

11) $\mathrm{Cos}\ x = \mathrm{Cos}\ (x+y).\ \mathrm{Cos}\ y + \mathrm{Sin}\ (x+y)\ \mathrm{Sin}\ y$

12) $\mathrm{Sin}\ 2x = \frac{1 + \mathrm{Cos}\ 2x}{\mathrm{Cos}\ x}$

13) $\mathrm{Cos}\ x = \frac{1 + \mathrm{Cos}\ 2x}{\mathrm{Sin}\ 2x}$

14) $\mathrm{Sin}\ ny = 2\ \mathrm{Sin}\ (n-1)\ y.\ \mathrm{Cos}\ y - \mathrm{Sin}\ (n-2)\ y$

15) $\mathrm{Cos}\ ny = 2\ \mathrm{Cos}\ (n-1)\ y.\ \mathrm{Cos}\ y - \mathrm{Cos}\ (n-2)\ y$

16) $\mathrm{Tg}\ (x+y) = \frac{\mathrm{Tg}\ x + \mathrm{Tg}\ y}{1 - \mathrm{Tg}\ x.\ \mathrm{Tg}\ y}$

17) $\mathrm{Tg}\ (x-y) = \frac{\mathrm{Tg}\ x - \mathrm{Tg}\ y}{1 + \mathrm{Tg}\ x.\ \mathrm{Tg}\ y}$

18) $\mathrm{Tg}\ 2x = \frac{2\ \mathrm{Tg}\ x}{1 - \mathrm{Tg}\ x^2}$

19) $\mathrm{Tg}\,3x = \frac{3\,\mathrm{Tg}x - \mathrm{Tg}x^3}{1 - 3\,\mathrm{Tg}x^2}$

20) $\mathrm{Tg}\,x = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{Cos}\,2x}{1 + \mathrm{Cos}\,2x}}$

21) $\mathrm{Tang}\,x = \frac{1 - \mathrm{Cos}\,2x}{\mathrm{Sin}\,2x}$

22) $\mathrm{Tg}x = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,x^2}{\mathrm{Sin}\,2x}$

23) $\mathrm{Tg}\,x + \mathrm{Cotg}\,x = \frac{2}{\mathrm{Sin}\,2x}$

24) $\mathrm{Cotg}\,2x = \frac{\mathrm{Cotg}\,x - \mathrm{Tg}\,x}{2}$ u. dgl. m.

25) $\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \mathrm{Cos.}\,x - \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

26) $\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \mathrm{Sin}\,x$

indem man bemerkt, daß $\mathrm{Sin}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{Cos}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Anmerk. Diese beyden letzten Formeln dienen dazu Sinus und Cosinus der Winkel, die größer als $\frac{\pi}{6}$ sind, zu berechnen, sobald die der Winkel unter $\frac{\pi}{6}$ schon berechnet sind. Und da der Sinus eines sehr kleinen Winkels z. B. von 1''' dem zugehörigen Bogen sehr nahe kommt, dessen Radius = 1 oder jedem andern zugehörigen Bogen durch seinen Radius dividirt, so läßt sich Sinus und Cosinus von 1''' aus der berechneten Zahl für die Peripherie leicht finden, daraus nach den vorhergehenden Formeln 1) 2) 3) 4) und besonders dann nach (§. 100) auch der Sinus und Cosinus von 2''', 3''' u. s. f. bis zu 1'', 1', 1°, und jeden Win-

kel bis zu $\frac{\pi}{6}$. Für die Winkel von $\frac{\pi}{6}$ bis zu $\frac{\pi}{4}$ nimmt man obige Formeln 25) 26) zu Hülfe, und da $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ und umgekehrt ist, so braucht man keine weitere Berechnung anzustellen für die Winkel, die größer als $\frac{\pi}{4}$ sind. Aus den Sinus und Cosinus sind die Tangenten, Sekanten, Cotangenten, Cosekanten leicht berechnet.

§. 103. Ohne uns länger bei den Formeln aufzuhalten, deren Zahl in's unendliche gesteigert werden kann, die aber alle aus (§. 100) und den Erklärungen der trigonometrischen Linien abgeleitet seyn müssen, können wir die Trigonometrie durch das bisherige in ihren Elementen als völlig abgeschlossen betrachten; und wir fügen daher hier nur noch die gewöhnlichen Anwendungen auf ebene und körperliche Dreyecke bey.

I. Anwendung auf ebene Dreyecke.

§. 104. Hier sind folgende zwey Sätze vorzüglich zu bemerken.

1) In jedem ebenen Dreyeck verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.
2) In jedem ebenen Dreyeck ist der Cosinus irgend eines der Winkel gleich dem Quotienten, dessen Dividend die Differenz aus der Summe der Quadrate (zweyten Potenzen) der einschließenden Seiten und dem Quadrat der dritten Seite, dessen Divisor aber das 2fache Produkt der beyden einschließenden Seiten ist.

Fig. 22. Nennt man a, b, c, A, B, C, die Seiten und die gegenüberstehenden Winkel,

setzt die Höhe CG = p, AG = α BG = β so lassen sich diese 2 Sätze durch Zeichen auf folgende Art ausdrücken.

1) a:b = Sin A : Sin B oder
a:b:c = Sin A : Sin B : Sin C.

2) $\text{Cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Der erste Satz erhellet sogleich, wenn man bedenkt, daß Sin A, Sin B nichts anders sind als die Quotienten $\frac{p}{b}$ und $\frac{p}{a}$, die man nur durch einander dividiren darf, um zu finden, daß $\frac{\text{Sin } A}{\text{Sin } B} = \frac{a}{b}$ wird. —

Der zweyte Satz ergiebt sich aus den 4 Gleichungen $\text{Cos } A = \frac{\alpha}{b}$, $\alpha + \beta = c$, $a^2 = \beta^2 + p^2$, $b^2 = \alpha^2 + p^2$ aus denen man nur die 3 Größen α, β, p, eliminiren darf; was ohne Schwierigkeit geschieht. —

Sind nun 3 Stücke in einem Dreyeck gegeben, so sind dies 1) 1 Seite und 2 (folglich 3) Winkel 2) 2 Seiten und 1 gegenüberstehender Winkel (wenn das Dreyeck bestimmt seyn soll, muß man wissen, ob der andere gegenüberstehende Winkel spitz oder stumpf ist) 3) 2 Seiten und 1 eingeschlossener Winkel 4) alle 3 Seiten. — In den erstern beyden Fällen wendet man den Satz Nro. 1 an, und die übrigen 3 Stücke nebst der Höhe, folglich auch nebst dem Inhalt, ergeben sich sogleich. In den beyden letztern Fällen ergiebt sich das gesuchte aus der Formel Nro. 2; da diese Gleichung jede der 4 Größen Cos. A, a, b, c, giebt, sobald 3 davon gegeben sind. Auch der zweyte Fall wird durch diese Gleichung gelöst.

Anmerk. 1) Gewöhnlich pflegt man rechtwinkliche Dreyecke noch besonders zu betrachten, welches indeß hier ganz überflüssig ist. — In einem rechtwinklichen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel entweder noch 2 Seiten gegeben, oder 1 Seite und 1 Winkel. Im erstern Fall findet man aus den sich ergebenden Quotienten der beyden Seiten den in der Tabelle zugehörigen Winkel unmittelbar. Im andern Falle dividirt man die gegebene und gesuchte Seite durcheinander und da, wegen des gegebenen Winkels, dieser Quotient schon bekannt ist, und aus der Tabelle genommen werden kann, so giebt dies eine Gleichung, aus der die unbekannte Seite unmittelbar sich ergiebt. — Sey z. B. in dem bey B rechtwinklichen Dreyeck,

Fig. 23. 1) AB und BC gegeben, so hat man $\mathrm{Tg}\, A = \frac{BC}{AB}$, $\mathrm{Tg}\, C = \frac{AB}{BC}$ folglich die Winkel B und C unmittelbar. Wären

2) AB und AC gegeben, so hätte man $\frac{AB}{AC} = \mathrm{Cos}\, A = \mathrm{Sin}\, C$, folglich sogleich A und C gefunden. Wäre

3) AC und der Winkel A gegeben, so erhielte man $\frac{AB}{AC} = \mathrm{Cos}\, A$ und $\frac{BC}{AC} = \mathrm{Sin}\, A$ folglich $AB = AC.\, \mathrm{Cos}\, A$ und $BC = AC.\, \mathrm{Sin}\, A$, demnach AB und BC gefunden. Wäre endlich

4) AB und der Winkel A gegeben, so hätte man $\frac{AB}{AC} = \mathrm{Cos}\, A$ $\frac{BC}{AB} = \mathrm{Tg}\, A$, folglich $AC = \frac{AB}{\mathrm{Cos}\, A}$ und $BC = AB.\, \mathrm{Tg}\, A$. In allen Fällen hat man das Gesuchte unmittelbar aus der Definition.

Anmerk. 2) Die Nro. 2 des Paragraphen erfordert zu ihrer Entwickelung eine etwas größere Kenntniß der Zahlenlehre insbesondere in ihrer Anwendung auf den Fall, wo eine Seite aus den beyden andern Seiten und einem Winkel gesucht (und die Gleichung immer quadratisch) wird. Deswegen pflegt man um den 3ten und 4ten Fall zu lösen, gewöhnlich folgenderweise zu verfahren:

1) „Aus 2 Seiten b und c und dem eingeschlosse„nen Winkel A die übrigen Winkel zu finden."

Es ist $c + b : c - b = \mathrm{Tg}\, \frac{1}{2} (C + B) : \mathrm{Tg}\, \frac{1}{2} (C - B)$ eine Gleichung, die sich leicht erweisen läßt, wenn man nur $c + b$, $c - b$, und $\frac{1}{2} (C + B)$

$\frac{1}{2}$(B — C) so construirt, daß eine Verbindung statt finden kann. Nun ist C + B = π — A, folglich bekannt; mithin auch C — B bekannt; aber $\frac{1}{2}$ (C + B) + $\frac{1}{2}$ (C — B) = C, $\frac{1}{2}$ (C + B) — $\frac{1}{2}$ (C — B) = B.

2) „Aus 3 Seiten a, b, c, die Winkel zu finden."

Es ist c : a + b = a — b : BF (wie aus der Figur erhellet) also BF gefunden durch diese Gleichung; folglich auch AF, mithin auch AG und dann auch $\text{Cos } A = \frac{AG}{b}$; welches zu finden war.

§. 105. Aus (§. 104. n. 2) findet sich auch noch:

$$3)\ \text{Sin } A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2bc}$$

daher der Inhalt des Dreyecks:

4) $= \frac{1}{2} bc. \text{Sin } A = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$ welche Formeln deswegen so besonders brauchbar sind, als sich die Logarithmen, mit denen man wo möglich alle trigonometrischen Rechnungen ausführt, auf sie besonders leicht anwenden lassen.

Eben so findet man:

$$5)\ p = \frac{c}{\text{Cotg } B + \text{Cotg } A}$$

Desgleichen:

$$6)\ c = b. (\text{Sin } A. \text{Cotg } B + \text{Cos } A)$$

$$7)\ c = \frac{b. \text{Sin } (A + B)}{\text{Sin } B}$$

$$8)\ \text{Cotg } B = \frac{c}{b. \text{Sin } A} - \text{Cotg } A$$

$$9)\ \text{Tg } B = \frac{b. \text{Sin } A}{c - b. \text{Cos } A}$$

II. Anwendung auf körperliche Dreyecke.

A) Rechtwinkliche körperliche Dreyecke.

Fig. 24. §. 106. Sind DA, DB, DC die Kan-

ten eines an der Kante DA rechtwinklichen körperlichen Dreyecks, BDC = a, ADC = b, ADB = c die Seiten (wo a die Hypothenuse, b und c die Katheten sind) A, B, C. die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel desselben, und fällt man aus einem willkührlichen Punkte C die senkrechte CF auf AD und die senkrechte FE auf DB, so ist auch CE auf DB senkrecht (§. 56) und es entstehen 4 rechtwinkliche ebene Dreyecke CED, CFD, FED, CFE, welche ausser den rechten Winkeln nach der Reihe die Winkel a, b, c und B enthalten (in so fern CEF der dem B correspondirende Linienwinkel ist). Man schreibe nun die Quotienten, die man in diesen 4 rechtwinklichen Dreyecken für Sinus, Cosinus und Tangente der Winkel a, b, c, B erhält, hin, suche alle Paare heraus, die zu zwey verschiedenen Winkeln gehören, und in denen der Divisor des einen dem Dividenden des andern gleich ist, multiplicire alle diese Paare mit einander, so hebt sich der gemeinschaftliche Dividend und Divisor weg und man erhält zum Produkt einen neuen Quotienten zweyer Linien. In so fern dieser neue Quotient unter den vorher aufgezählten enthalten ist, erhält man folgende 4 Gleichungen:

I. Sin a. Sin B = Sin b

II. Sin c. Tg. B = Tg b

III. Tg a. Cos B = Tg c

IV. Cos b. Cos c = Cos a.

Was von dem Winkel B gilt, muß auch von dem Winkel C gelten, folglich hat man noch:

1) Sin a. Sin C = Sin c

2) Sin b. Tg C = Tg. c

3) Tg a. Cos C = Tg b

Dividirt man III durch 1) und setzt statt Cos a aus IV das Produkt Cos b. Cos c, so erhält man

V. Cos b. Sin C = Cos. B

und diese verbunden mit I und 3) giebt:

VI. Cos a. Tg C = Cotg. B

Diese 6 Gleichungen pflegt man gewöhnlich hinsichtlich der rechtwinklichen Dreyecke aufzustellen.

B. Schiefwinkliche körperliche Dreiecke.

Fig. 25 u. 26. §. 107. Seyen DB, DC, DB' die 3 Kanten eines schiefwinklichen körperlichen Dreyecks; BDC = a, B'DC = a' und B'DB' = a'' die 3 Seiten, so wie B', B und A'' die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel. Fällt man nun durch die 3te Kante DC eine Ebene DCA, senkrecht auf ADB', so fällt diese entweder wie in Fig. 25 oder wie in Fig. 26, je nachdem die beyden Winkel B und B' gleichartig (d. h. beyde spitz oder beyde stumpf) oder ungleichartig sind; und es entstehen zwey rechtwinkliche körperliche Dreyecke, deren gemeinschaftliche Kathete ADC = b, die beyden andern Katheten BDA = c und B'DA = c', so wie ihre gegenüberstehenden Winkel C und C' seyn mögen. Für jedes dieser Dreyecke hat man 7 Gleichungen:

1) Cos a = Cos b. Cos c
2) Cos a' = Cos b. Cos c'
3) Sin b = Sin a. Siu B
4) Sin b = Sin a'. Sin B'
5) Tg c = Tg a. Cos B
6) Tg c' = Tg a'. Cos B'
7) Tg b = Sin c. Tg B
8) Tg b = Sin c'. Tg B'
9) Sin c = Sin a. Sin C
10) Sin c' = Sin a'. Sin C'
11) Tg b = Tg a. Cos C
12) Tg b = Tg a'. Cos C'

13) $\mathrm{Tg}\ c = \mathrm{Sin}\ b \cdot \mathrm{Tg}\ C$

14) $\mathrm{Tg}\ c' = \mathrm{Sin}\ b \cdot \mathrm{Tg}\ C'$

Dabey ist im ersten Fall Fig. 25 $c + c' = a''$ und $C + C' = A''$; im andern Fall Fig. 26 aber $c - c' = a'$, $C - C' = A''$.

Schaft man nun aus diesen Gleichungen die Winkel c, c', C, C', und b weg, indem man die Gleichungen (§. 100) zu Hülfe nimmt, so daß bloß noch die drey Seiten und die drey Winkel des gegebenen körperlichen Dreyecks übrig bleiben, so erhält man eine Anzahl Gleichungen zwischen den 6 Stücken des körperlichen Dreyecks, unter denen man diejenigen, die nur 4 dieser Stücke enthalten, heraussuchen kann, welche dann immer das 4te finden lassen, wenn drey davon gegeben sind.

So findet man leicht folgende Gleichungen:

I. $\mathrm{Sin}\ a \cdot \mathrm{Sin}\ B = \mathrm{Sin}\ a' \cdot \mathrm{Sin}\ B'$ oder

$\mathrm{Sin}\ a : \mathrm{Sin}\ a' = \mathrm{Sin}\ B' : \mathrm{Sin}\ B$ (aus No. 3 und 4.)

II. $$\mathrm{Tg.}\ a = \frac{\mathrm{Sin}\ a''}{\mathrm{Cos}\ a'' \cdot \mathrm{Cos.}\ B \pm \mathrm{Sin}\ B \cdot \mathrm{Cotg.}\ B'}$$

III. $$\mathrm{Cos.}\ B' = \frac{\mp \mathrm{Cos.}\ a' \cdot \mathrm{Cos.}\ a'' \pm \mathrm{Cos}\ a}{\mathrm{Sin}\ a' \cdot \mathrm{Sin}\ a''}$$

VI. $$\mathrm{Cos.}\ a = \frac{\mathrm{Cos}\ B \cdot \mathrm{Cos}\ A'' \pm \mathrm{Cos.}\ B'}{\mathrm{Sin.}\ B \cdot \mathrm{Sin}\ A''}$$

Anmerk. 1) Die Gleichung II. ergiebt sich, wenn man aus n. 7 und 8 Tg. b wegschafft, statt Sin c' (wegen $c' = \pm a'' + c$ aus (§. 100) den Werth setzt, Tg. c findet und dafür aus (n. 5) Tg. a. Cos. B substituirt.

Die Gleichung III dagegen erhält man, wenn man aus (n. 1 und 2) Cos. b wegschafft, Cos. c nach (§. 100), (wegen $c = a'' \mp c'$) substituirt, und Tg. c' mittelst (n. 6) wegschafft.

Die Gleichung IV endlich geht hervor, wenn man (n. 5. 9. 1 und 6. 10. 2) die Gleichungen (V. §. 106)

für beyde rechtwinkliche Dreyecke, dann aus diesen die Gleichungen (VI. §. 106) entwickelt; aus den beyden ersten Cos. b wegschafft, statt Sin. C noch (§. 100) (wegen C′ = ± A′′ ∓ C) seinen Werth setzt, durch Sin. C dividirt, und dann statt Cotg. C den Werth aus der für das zweyte rechtwinkliche Dreyeck gefundenen Gleichung VI. substituirt.

Anmerk. 2) Da nach (§. 101) zu jedem Sinus eine unendliche Anzahl Winkel verschiedener Gattungen und namentlich zwey Nebenwinkel der ersten Gattung gehören, so kann man in vielen Fällen, wo sich für den gesuchten Winkel ein Sinus aus den Gleichungen ergiebt, nicht wissen, ob der Winkel der spitze oder der stumpfe von den beyden zugehörigen Nebenwinkeln ist. Es kann auch die Aufgabe wirklich unbestimmt seyn, und beyde oder noch mehr Auflösungen zulassen; oder sie ist bestimmt und dann muß sich ihre Bestimmung aus andern Betrachtungen, namentlich aus (§. 58) ergeben.

Anmerk. 3) Da jedes körperliche Dreyeck, dessen Spitze in dem Mittelpunkt einer Kugel liegt, ein correspondirendes sphärisches Dreyeck hat, so kann man, was hier von körperlichen Dreyecken gesagt ist, auch mit der gehörigen Abänderung von sphärischen Dreyecken sagen, weswegen in den zugehörigen Figuren die Bogen der größten Kreise mit angedeutet worden sind, was an sich gar nicht nöthig war.

Schluß-Anmerkung. Da es kein rechtwinkliches Dreyeck giebt, welches einen stumpfen Winkel hat, so ist klar, daß es der Erklärung (§. 98) zu Folge keine trigonometrischen Linien geben kann, für Winkel die nicht spitze sind; auch bedarf es zur Berechnung der Dreyecke nicht solcher, da, selbst wenn die Dreyecke stumpfe Winkel haben, nie diese, sondern immer nur ihre spitzen Nebenwinkel in Rechnung gebracht werden können.

Für das Zeichen Sin. A, im Falle A kein spitzer Winkel ist, hat man also noch keine Definition und ich stelle folgende auf: „Sin. A soll immer den Werth bezeichnen, der sich aus der Formel (I. §. 100) ergiebt, indem man die Formel allgemein gelten läßt, ohne zu untersuchen, ob die Winkel spitze sind oder nicht. Cos. A, Sec. A, Cosec. A, Tang. A, Cotg. A sollen ferner allgemein das Bezeichnen, was sich aus den Formeln.

$\sqrt{1-\text{Sin A}^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-\text{Sin A}^2}}$, $\frac{1}{\text{Sin A}}$, $\frac{\text{Sin A}}{\sqrt{1-\text{Sin A}^2}}$, $\frac{\sqrt{1-\text{Sin A}^2}}{\text{Sin A}}$

für sie ergiebt. Da alle übrigen Formeln, aus diesen abgeleitet sind, so gelten auch alle dann ganz allgemein, ohne daß man nachsehen müßte, ob die Winkel alle wirklich spitze Winkel sind; sie können selbst negativ seyn. Es ist aber diese Verallgemeinerung der Erklärung nicht nur erlaubt, wie man aus dem vorhergehenden gesehen hat, sondern sie ist auch nothwendig, weil man sonst gar keine allgemeinen Untersuchungen anstellen könnte, indem man bey den wenigsten Relationen wissen kann, ob die in ihr vorkommenden Winkel, (die Summen und Differenzen aus andern seyn können) wirklich spitze Winkel sind oder nicht. Nur dieses ist der richtige Gesichtspunkt, aus welchem die allgemeine Gültigkeit der trigonometrischen Relationen mit gehöriger mathematischer Strenge hervorgehen kann.

Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

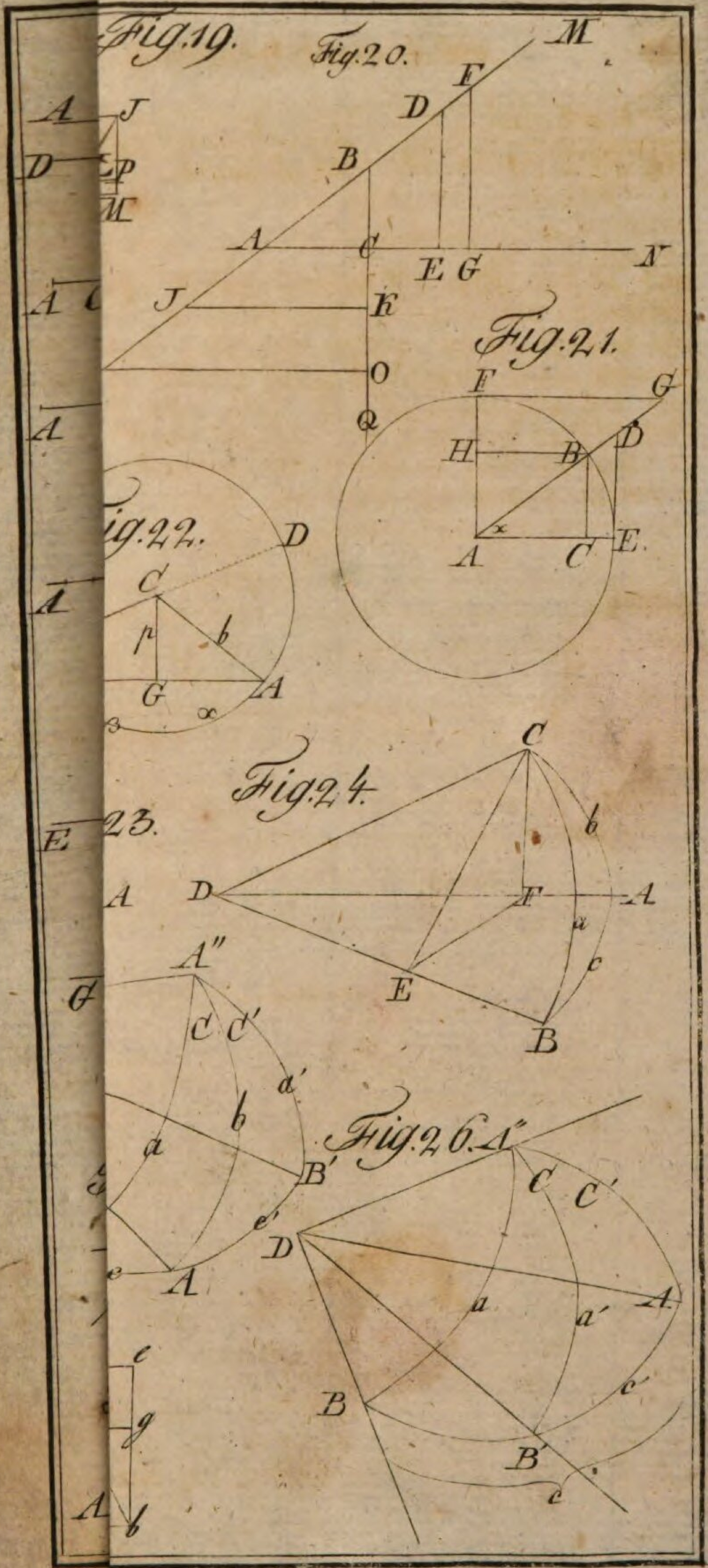
Fig.19.
Fig.20.
Fig.21.
ig.22.
23.
Fig.24.
Fig.26.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Elementar-Geometrie und Trigonometrie von dessen reiner Mathematik für Schulen ... die 2. Abth

Berlin 1819

Math.p. 382 e
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082501-9